COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 2 3 4 5 6	
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 2 SETTEMBRE 2019

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'integrale curvilineo I del campo $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x, y) = e^x$ e $f^2(x, y) = \operatorname{sen} y$ per $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ lungo la curva parametrica $\gamma(t) = \log(\cos t)e_1 + te_2$, $t \in [0, \pi/4]$, è

(a) non si può calcolare; (b) $I = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$; (c) $I = 0$; (d) $I = \dfrac{\pi}{4} - 1$.

Soluzione. Poiché il campo f è continuo e la curva γ è liscia, risulta

$$I = \int_\gamma f \cdot dl = \int_0^{\pi/4} \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_0^{\pi/4} \left[\cos t \left(-\frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}\right) + \operatorname{sen} t\right] dt = 0.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $f(0, 0) = -1$ e $\nabla f(0, 0) = (2, -1/2)$. Allora, il piano tangente al grafico di $g = (1 + f^2)^{-1}$ in $(0, 0)$

(a) non si può calcolare; (b) è $4x - y - 4z = -2$; (c) è $4x - y - 8z = -4$.

Soluzione. Poiché f è di classe C^1 e $1 + f^2 \geq 1$ in $\mathbb{R}^2$, la funzione $g = (1 + f^2)^{-1}$ risulta di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ e si ha $g(0, 0) = 1/2$ e

$$g_x(0, 0) = -\frac{2f(0, 0)}{(1 + [f(0, 0)]^2)^2} f_x(0, 0) = 1 \qquad \text{e} \qquad g_y(0, 0) = -\frac{2f(0, 0)}{(1 + [f(0, 0)]^2)^2} f_y(0, 0) = -1/4.$$

L'equazione del piano tangente al grafico di g in $(0, 0)$ è $z - 1/2 = x - y/4$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. Il volume V dell'insieme $K = \{(x, y, z) : 0 \leq x \leq y \leq z \leq 1\}$ è

(a) $V = 1$; (b) $V = 1/3$; (c) $V = 1/6$; (d) $V = 1/27$.

Soluzione. L'insieme K è un poliedro compatto e quindi misurabile. Per la formula di riduzione risulta

$$V = \int_K 1 \, dV_3(x, y, z) = \int_0^1 \left(\int_0^z \left(\int_0^y 1 \, dx\right) dy\right) dz = \int_0^1 \left(\int_0^z y \, dy\right) dz = \int_0^1 z^2/2 \, dz = 1/6.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2 - 2}, \qquad (x,y) \in D.$$

(a) Determinate il dominio D di f.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(c) Calcolate il minimo globale di f sull'insieme

$$K_R = \left\{(x,y) : \ 3 \le x^2 + y^2 \le R^2, \ x \ge 0 \text{ e } 0 \le y \le 1\right\}, \qquad R > \sqrt{3}.$$

(d) Stabilite se esiste il minimo globale di f in

$$K_\infty = \left\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \ge 3, \ x \ge 0 \text{ e } 0 \le y \le 1\right\}.$$

Soluzione. (a) Il dominio di f è l'insieme aperto $D = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 \ne 2\}$.
(b) La funzione f è di classe $C^\infty(D)$ ed è evidentemente antisimmetrica rispetto alle bisettrici. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = \frac{4x\left(y^2 - 1\right)}{\left(x^2 + y^2 - 2\right)^2} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -\frac{4y\left(x^2 - 1\right)}{\left(x^2 + y^2 - 2\right)^2}$$

per ogni $(x,y) \in D$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato da $x\left(y^2 - 1\right) = 0$, $y\left(x^2 - 1\right) = 0$ e $x^2 + y^2 \ne 2$. L'unica soluzione di tale sistema si ha per $x = y = 0$ e conseguentemente l'unico punto critico di f è l'origine.
Per stabilire la natura del punto critico $(0,0)$ non è necessario esaminare la matrice hessiana di f in $(0,0)$ poiché si ha $f(0,0) = 0$ e f prende valori positivi e negativi in ogni intorno dell'origine. L'origine è quindi punto di sella di f.
(c) L'insieme K_R è la striscia orizzontale contenuta nel primo quadrante con $0 \le y \le 1$ e compresa tra le circonferenze di centro nell'origine e raggi $\sqrt{3}$ e R. Tale insieme è evidentemente chiuso (controimmagine di intervalli chiusi mediante polinomi) e limitato e quindi è compatto. Poiché f è continua, essa assume minimo e massimo globale in K_R per ogni $R \ge \sqrt{3}$ per il teorema di Weierstrass. Alla luce di (b) si ricava che il massimo ed il minimo globale di f in K_R devono essere assunti sul bordo ∂K_R.
Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K_r sono

$$\begin{aligned}
&\varphi_1(t) = f(t,0) = \frac{t^2}{t^2 - 2}, && \sqrt{3} \le t \le R;\\
&\varphi_2(t) = f\left(\sqrt{R^2 - t^2}, t\right) = \frac{R^2 - 2t^2}{R^2 - 2}, && 0 \le t \le 1;\\
&\varphi_3(t) = f(R - t, 1) = 1, && 0 \le t \le R - \sqrt{3};\\
&\varphi_4(t) = f\left(\sqrt{3 - (1-t)^2}, t\right) = 3 - 2(1-t)^2, && 0 \le t \le 1.
\end{aligned}$$

Le funzioni φ_1 e φ_2 sono strettamente decrescenti mentre φ_4 è strettamente crescente. Conseguentemente, il minimo e il massimo globale di f in K_R sono assunti nei punti del segmento di estremi $(\sqrt{2},1)$ e $(\sqrt{R^2-1},1)$ e in $(\sqrt{3},0)$ rispettivamente e risulta

$$\min_{K_R} f = 1 \qquad \text{e} \qquad \max_{K_R} f = 3.$$

(d) Per quanto provato in (c) la funzione f non può assumere nella striscia K_∞ alcun valore minore di uno e, essendo costantemente uguale a 1 nei punti del dominio D con $y = 1$ si conclude che il minimo globale di f in K_∞ esiste ed è uguale a 1.

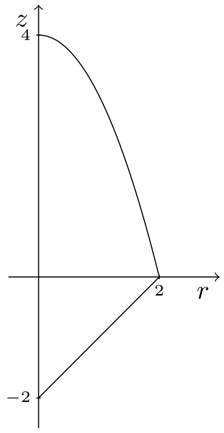
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x\,,y\,,z):\ 0 \le y \le x \text{ e } \sqrt{x^2+y^2} - 2 \le z \le 4 - x^2 - y^2 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xyz\,dV_3(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione di spazio compresa tra i piani $x = 0$ e $x = y$ con $x\,,y \ge 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) che sta sopra la retta di equazione $z = r - 2$ e sotto la parabola di equazione $z = 4 - r^2$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi. La funzione

$$f(x\,,y\,,z) = xyz, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y):\ x^2+y^2 \le 2 \text{ e } 0 \le y \le x \right\}$$

e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento

$$K_{(x,y)} = \left[\sqrt{x^2+y^2} - 2, 4 - x^2 - y^2 \right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-2}^{4-x^2-y^2} xyz\,dz \right) dV_2(x\,,y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_0^2 r^3 \left(\int_{r-2}^{4-r^2} z\,dz \right) dr \int_0^{\pi/4} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\,d\theta = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 r^3 \left[\left(4 - r^2\right)^2 - (2-r)^2 \right] dr = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^2 r^3 \left(r^4 - 9r^2 + 4r + 12 \right) dr = \cdots = \frac{6}{5}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 4e^{2t} - 4t^2 + 8t + 2 \\ x(0) = 4 \text{ e } x'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ le cui due soluzioni sono $\lambda = 2$ coincidenti. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{2t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = te^{2t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di una soluzione dell'equazione omogenea e di un polinomio, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa considerando separatamente i due casi.
Nel caso della funzione $y_1(t) = e^{2t}$, $t \in \mathbb{R}$, che è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluazione della forma

$$x_p(t) = At^2 e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A \in \mathbb{R}$ costante da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) + 4x_p(t) = 2Ae^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa con y_1 per $A = 2$.
Nel caso del polinomio $y_2(t) = -4t^2 + 8t + 2$, $t \in \mathbb{R}$, cerchiamo una soluazione della forma

$$x_p(t) = Bt^2 + Ct + D, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $B, C, D \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) + 4x_p(t) = 4Bt^2 + 4(C - 2B)t + 2(B - 2C + 2D), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa con y_2 per $B = -1$, $C = 0$ e $D = 1$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 te^{2t} + 2t^2 e^{2t} - t^2 + 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 4$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 1 = 4 \\ x'(0) = 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 3$ e $C_2 = -5$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \left(2t^2 - 5t + 3\right) e^{2t} - t^2 + 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$