| | | | |
|---|---|---|---|
| Cognome | ______________________ | Non scrivere qui | |
| Nome | ______________________ | 1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6 | |
| Matricola | |_|_|_|_|_|_| | | |
| Laurea | Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec | | |

# Università degli Studi di Parma
# Dipartimento di Ingegneria e Architettura
# Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
# A.A. 2018-2019 — Parma, 18 Luglio 2019

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

**Esercizio 1.** L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = x\cos\left(x^2+2y^2\right)+y$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, nel punto di coordinate $(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})$ è

(a) $x-y+z=0$; (b) $x-2y+z=\sqrt{\pi}$; (c) $x-2y+z=-\sqrt{\pi}$.

---

**Soluzione.** Si ha $f(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi})=0$ e

$$\begin{aligned} f_x(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) &= \cos\left(x^2+2y^2\right) - 2x^2\operatorname{sen}\left(x^2+2y^2\right)\Big|_{x=y=\sqrt{\pi}} = -1;\\ f_y(\sqrt{\pi},\sqrt{\pi}) &= -4xy\operatorname{sen}\left(x^2+2y^2\right)+1\Big|_{x=y=\sqrt{\pi}} = 1; \end{aligned}$$

da cui segue $z=-(x-\sqrt{\pi})+(y-\sqrt{\pi})$ ovvero $x-y+z=0$. La risposta corretta è quindi (a).

---

**Esercizio 2.** Il volume dell'insieme $K=\left\{(x,y,z):\ 3\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 2 \text{ e } x,y\ge 0\right\}$ è

(a) $2\pi/3$; (b) $9\pi/64$; (c) $2\pi/27$.

---

**Soluzione.** A meno delle condizioni $x,y\ge 0$ l'insieme $K$ è il solido di rotazione (cono) che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse $z$ il triangolo contenuto nel primo quadrante del piano $rz$ definito da $0\le 3r\le z\le 2$. L'insieme $K$ è compatto e misurabile e in coordinate cilindriche risulta con semplici calcoli

$$|K| = \frac{\pi}{2}\int_0^{2/3}\left(\int_{3r}^{2} r\,dz\right)dr = \frac{\pi}{2}\left(r^2-r^3\right)\Big|_0^{2/3} = \frac{2\pi}{27}.$$

La risposta corretta è quindi (c).

---

**Esercizio 3.** Sia $a\in\mathbb{R}$. Tutte le soluzioni dell'equazioni differenziale $x''(t)+2ax'(t)+x(t)=1$ hanno limite finito per $t\to+\infty$ se e solo se

(a) $a>0$; (b) $a>0$ e $a\ne 1$; (c) $0<a<1$.

---

**Soluzione.** Tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni $x(t)=C_1x_1(t)+C_2x_2(t)+1$ con $x_i(t)$ $(i=1,2)$ sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e $C_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ costanti arbitrarie e quindi hanno limite finito per $t\to+\infty$ se e solo se entrambe le soluzioni fondamentali $x_i(t)$ hanno limite finito per $t\to+\infty$. Tenendo conto della forma assunta dalle funzioni $x_i(t)$ al variare di $a\in\mathbb{R}$, si conclude che $x_i(t)\to 0$ per $t\to+\infty$ se e solo se risulta $a>0$. La risposta corretta è quindi (a).

**Esercizio 4.** Sia
$$f(x,y) = \left(1 + x^2y^2\right) \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di $f$ e stabilitene la natura.

(b) Calcolate $\lim\limits_{(x,y)\to\infty} f(x,y)$;

(c) Determinate $\sup\limits_{\mathbb{R}^2} f$ e $\inf\limits_{\mathbb{R}^2} f$ stabilendo se si tratta di massimo e/o minimo;

(d) Determinate massimo e minimo globali di $f$ sull'insieme $K = \left\{(x,y) : \ x^2 + y^2 \le 4\right\}$.

---

**Soluzione.** (a) La funzione $f$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ed è evidentemente simmetrica rispetto agli assi e alle bisettrici. Le derivate parziali di $f$ sono date da
$$f_x(x,y) = -2x\left[y^2\left(x^2-1\right)+1\right]\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -2y\left[x^2\left(y^2-1\right)+1\right]\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$
per ogni $(x,y)$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema simmetrico formato dalle equazioni $x\left[y^2\left(x^2-1\right)+1\right] = 0$ e $y\left[x^2\left(y^2-1\right)+1\right] = 0$. L'unica soluzione di tale sistema si ha per $x = y = 0$. Infatti, per $x = 0$ deve essere $y = 0$ e viceversa e non ci sono soluzioni per $x = \pm 1$ o $y = \pm 1$. Inoltre, per $x, y \ne 0$ e $x, y \ne \pm 1$ si ha
$$\begin{cases} x\left[y^2\left(x^2-1\right)+1\right] = 0 \\ y\left[x^2\left(y^2-1\right)+1\right] = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{1-x^2} \\ x^2 = \dfrac{1}{1-y^2} \end{cases} \implies \begin{cases} y^2 = \dfrac{1}{1-x^2} \\ x^4 - x^2 + 1 = 0 \end{cases}$$
e la seconda equazione del sistema a destra non ha soluzioni. Pertanto l'unico punto critico di $f$ è l'origine. Le derivate seconde di $f$ sono
$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2\left(2x^4y^2 - 5x^2y^2 + 2x^2 + y^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \\ f_{yy}(x,y) &= 2\left(2x^2y^4 - 5x^2y^2 + x^2 + 2y^2 - 1\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \\ f_{xy}(x,y) &= f_{yx}(x,y) = 4xy\left[x^2y^2 - \left(x^2+y^2\right) + 2\right]\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \end{aligned}$$
per ogni $(x,y)$ e conseguentemente la matrice hessiana di $f$ nell'origine è
$$D^2 f(0,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$
L'origine è quindi punto di massimo di $f$.

(b) Ricordando che è $2|xy| \le x^2 + y^2$ per ogni $(x,y)$, si ha
$$0 < f(x,y) \le \left[1 + \frac{1}{4}\left(x^2+y^2\right)\right]\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \to 0^+$$
per $(x,y) \to \infty$.

(c) Poiché $f$ è continua, positiva e tale che $f(x,y) \to 0^+$ per $(x,y) \to \infty$, la funzione $f$ assume massimo globale in $\mathbb{R}^2$ per il teorema di Weierstrass generalizzato. Alla luce di (a) si conclude quindi che l'origine $(0,0)$ è punto di massimo globale di $f$ in $\mathbb{R}^2$ e che l'estremo inferiore di $f$ in $\mathbb{R}^2$ è uguale a zero ma $f$ non ammette minimo globale in $\mathbb{R}^2$.

(d) L'insieme $K$ è il cerchio di centro nell'origine e raggio $r = 2$. Esso è compatto poiché chiuso (controimmagine mediante un polinomio di un intervalli chiusi) e limitato e quindi $f$ assume minimo e massimo globale su $K$ per il teorema di Weierstrass. Per (c) l'origine è punto di massimo di $f$ su $K$ e inoltre il minimo globale di $f$ su $K$ deve essere assunto sul bordo $\partial K$ poiché non ci sono altri punti critici di $f$ interni a $K$. Sul bordo di $K$ risulta
$$f(x,y) = \left(1 + x^2y^2\right)\mathrm{e}^{-4}, \qquad x^2 + y^2 = 4,$$
e dunque è evidente che il minimo di $f$ su $\partial K$ e quindi anche su $K$ è assunto nei punti di coordinate $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$ dove risulta
$$f(\pm 1, 0) = f(0, \pm 1) = \frac{1}{\mathrm{e}^4}.$$

**Esercizio 5.** Sia

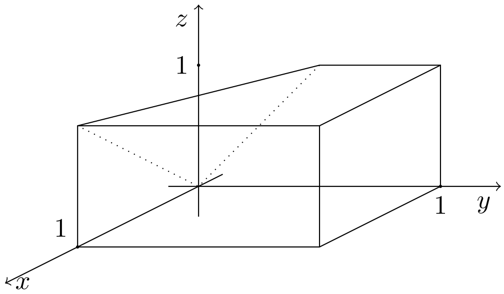
$$K = \{(x,y,z) : 0 \le z \le x + 2y \text{ e } 0 \le x,y,z \le 1\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme $K$.

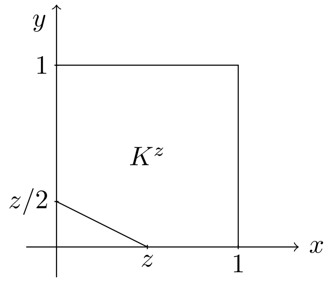
(b) Calcolate $I = \int_K y \, dV_3(x,y,z)$.

---

**Soluzione.** (a) L'insieme $K$ è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai piani di equazione $x = 0, 1$, $y = 0, 1$, $z = 0, 1$ e $z = x + 2y$. Esso è rappresentato in Figura (1).




(1)




(2)

(b) L'insieme $K$ è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = y, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un lineare e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di $f$ su $K$ mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di $K$ sull'asse $z$ è l'intervallo $[0,1]$ e la corrispondente sezione $K^z$ è il trapezio

$$K^z = \{(x,y,z) : z \le x + 2y \text{ e } 0 \le x,y \le 1\}, \qquad z \in [0,1],$$

rappresentato in Figura (2). Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_0^1 \left( \int_{K^z} y \, dV_2(x,y) \right) dz$$

e per ogni $z \in [0,1]$ risulta per lo stesso motivo

$$\begin{aligned}
\int_{K^z} y \, dV_2(x,y) &= \int_0^z \left( \int_{(z-x)/2}^1 y \, dy \right) dx + \int_z^1 \left( \int_0^1 y \, dy \right) dx = \\
&= \int_0^z \left( \frac{1}{2} - \frac{(z-x)^2}{8} \right) dz + \frac{1}{2}(1-z) = \\
&= \frac{1}{24}(z-x)^3 \Big|_0^z + \frac{1}{2} = \\
&= \frac{1}{2} - \frac{z^3}{24}.
\end{aligned}$$

Risulta pertanto

$$I = \int_0^1 \left( \frac{1}{2} - \frac{z^3}{24} \right) dz = \frac{1}{2} - \frac{1}{96} = \frac{47}{96}.$$

**Esercizio 6.** Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^3 + \dfrac{1}{x(t)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

---

**Soluzione.** L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^3 + \frac{1}{x} = \frac{x^4+1}{x}, \qquad x \neq 0$$

e, tenuto conto della condizione iniziale $x(0) = 1$, non è restrittivo considerare $h$ definita nell'intervallo $(0,+\infty)$. In tale intervallo la funzione $h$ è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Essendo $h(x)$ definita per $(x) > 0$, la soluzione massimale verifica $x(t) > 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$. Ponendo

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_1^y \frac{z}{z^4+1}\,dz = \frac{1}{2}\int_1^{y^2} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{2}\arctan u\Big|_1^{y^2} = \\ &= \frac{1}{2}\arctan\left(y^2\right) - \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{2}\arctan\left(y^2\right) - \frac{\pi}{8} \end{aligned}$$

per ogni $y > 0$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H\circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \sqrt{\tan\left(2t + \pi/4\right)}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned} \lim_{y\to 0^+} H(y) &= -\frac{\pi}{8}, \\ \lim_{y\to+\infty} H(y) &= \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{8}, \end{aligned}$$

si conclude che risulta

$$\alpha(x_0) = -\frac{\pi}{8} \qquad \text{e} \qquad \beta(x_0) = \frac{\pi}{8}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \sqrt{\tan\left(2t + \pi/4\right)}, \qquad |t| < \frac{\pi}{8}.$$