Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Laurea Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2018-2019 — Parma, 12 Giugno 2019

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'insieme $U = \big\{(x,y):\ \big(y - x^3\big)\big(y - x^2\big) < 0\big\}$ è

(a) chiuso; (b) illimitato; (c) connesso.

Soluzione. L'insieme U è aperto perché controimmagine mediante un polinomio di un intervallo aperto di $\mathbb{R}$ ed è unione dei seguenti tre insiemi aperti e disgiunti

$$U_1 = \big\{(x,y):\ x^3 < y < x^2 \text{ e } x < 0\big\}; \qquad U_2 = \big\{(x,y):\ x^3 < y < x^2 \text{ e } 0 < x < 1\big\};$$
$$U_3 = \big\{(x,y):\ x^2 < y < x^3 \text{ e } x > 1\big\};$$

con U_1 e U_2 illimitati. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. La lunghezza L della curva parametrica γ di equazione polare $\rho(\theta) = \cos\theta - 2\operatorname{sen}\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$, è

(a) $L = \pi/2$; (b) $L = \sqrt{3}\pi/2$; (c) $L = \sqrt{5}\pi/2$.

Soluzione. La parametrizzazione di γ è $\gamma(\theta) = \rho(\theta)\,[\cos(\theta)e_1 + \operatorname{sen}(\theta)e_2]$ per $\theta \in [-\pi/2, 0]$. Essendo γ liscia risulta

$$L = \int_0^{\pi/2} \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2}\, d\theta = \int_0^{\pi/2} \sqrt{5}\, d\theta = \ = \sqrt{5}\pi/2.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $\varphi(0,0) = 0$ e $\nabla\varphi(0,0) = (-1, 3)$ e sia $\Phi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $\nabla\Phi(0,0) = (2,1)$. Allora, la derivata direzionale di

$$f(x,y) = \Phi(x - 2\varphi(x,y), (y+1)\varphi(x,y)), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

in $(0,0)$ nella direzione del vettore $v = e_1/\sqrt{2} + e_2/\sqrt{2}$ è

(a) $\partial_v f(0,0) = -5/\sqrt{2}$; (b) $\partial_v f(0,0) = 3/\sqrt{2}$; (c) $\partial_v f(0,0) = -4/\sqrt{2}$.

Soluzione. Denotando con $\Phi(u,v)$ le variabili di Φ, per la formula di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f_x(0,0) = \Phi_u(0,0)[1 - 2\varphi_x(0,0)] + \Phi_v(0,0)\varphi_x(0,0);$$
$$f_y(0,0) = \Phi_u(0,0)\,[-2\varphi_y(0,0)] + \Phi_v(0,0)\,[\varphi(0,0) + \varphi_y(0,0)]\,.$$

Risulta quindi $f_x(0,0) = 5$ e $f_y(0,0) = -9$ e la derivata direzionale richiesta è data da

$$\partial_v f(0,0) = \langle \nabla f(0,0)\,|\,v\rangle = 5/\sqrt{2} - 9/\sqrt{2} = -4/\sqrt{2}.$$

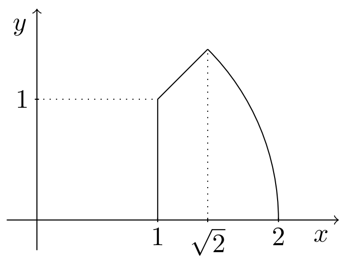
La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 - xy + yz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

Soluzione. La funzione f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y,z) = 4x^3 - y; \qquad f_y(x,y,z) = 2y - x + z; \qquad f_z(x,y,z) = 2z + y;$$
per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 4x^3 - y = 0 \\ 2y - x + z = 0 \\ 2z + y = 0. \end{cases}$$
Dalla terza equazione si ricava $y = -2z$ e, sostituendo nella seconda, si ottiene $x = -3z$ che, sostituito nella prima equazione, conduce all'equazione
$$54z^3 - z = 0$$
le cui soluzioni sono $z = 0$ e $z = \pm 1/\sqrt{54}$ cui corrispondono i punti critici
$$P = (0,0,0) \qquad \text{e} \qquad Q_\pm = (\pm 3/\sqrt{54}, \pm 2/\sqrt{54}, \mp 1/\sqrt{54}).$$
Le derivate parziali seconde di f sono
$$\begin{array}{lll} f_{xx}(x,y,z) = 12x^2; & f_{yy}(x,y,z) = f_{zz}(x,y,z) = 2; & \\ f_{xy}(x,y,z) = f_{yx}(x,y,z) = -1; & f_{xz}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 0; & f_{yz}(x,y,z) = f_{zy}(x,y,z) = 1; \end{array}$$
per ogni (x,y,z) e quindi le relative matrici hessiane sono
$$D^2 f(0,0,0) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D^2 f(\pm 3/\sqrt{54}, \pm 2/\sqrt{54}, \mp 1/\sqrt{54}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Per determinare la natura dei punti critici P e $Q_\pm$ esaminiamo il segno degli autovalori delle relative matrici hessiane.
Il polinomio caratteristico della matrice hessiana di f in P è
$$p(\lambda) = -\lambda(2-\lambda)^2 - (2-\lambda) + \lambda = -\lambda^3 + 4\lambda^2 - 2, \qquad \lambda \in \mathbb{R},$$
i cui zeri non sono evidenti. Tuttavia la matrice ha minori di NordOvest dati da $M_1 = 0$, $M_2 = -1$ e $M_3 = -2$ e quindi la relativa forma quadratica non può essere né definita positiva né definita negativa per il criterio di Sylvester. Avendo determinante non nullo, il punto P risulta essere punto di sella di f.
L'altra matrice ha autovalori positivi ($\lambda = 2$ e $\lambda = 2 \pm \sqrt{2}$) e quindi i punti $Q_\pm$ risultano essere punti di minimo locale stretto di f. Alternativamente si può osservare che i minori di NordOvest della matrice sono $M_1 = 2$, $M_2 = 3$ e $M_3 = 4$ e quindi la forma quadartrica associata è definita positiva per lo stesso criterio.
Anche se non richiesto, osserviamo che si ha
$$\begin{aligned} f(x,y,z) = x^4 + y^2 + z^2 - xy + yz &\geq x^2 + y^2 + z^2 - xy + yz - 1 \geq \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon}\right) x^2 + (1-\varepsilon) y^2 + \left(1 - \frac{1}{2\varepsilon}\right) y^2 - 1 \end{aligned}$$
poiché $ab \geq -\varepsilon a^2/2 - b^2/2\varepsilon$ per ogni $a, b \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$ cosicché, prendendo $\varepsilon = 3/4$, si ottiene
$$f(x,y,z) \geq x^2/3 + y^2/4 + z^2/3 - 1 \geq \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 1, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Risulta pertanto
$$\lim_{(x,y,z)\to\infty} f(x,y,z) = +\infty$$
e quindi i punti di minimo locale $Q_\pm$ sono in effetti punti di minimo globale di f per il teorema di Weierstrass generalizzato.

Esercizio 5. Calcolate
$$I = \int_K \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dV_2(x,y)$$
ove
$$K = \left\{(x,y):\ x \geq \max\{1,y\},\ y \geq 0 \text{ e } x^2+y^2 \leq 4\right\}.$$

Soluzione. L'insieme K è rappresentato nella figura seguente:



L'insieme K è compatto perché è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue ed è limitato. Inoltre, K è misurabile poiché il suo bordo e formato da segmenti e archi di circonferenza. La funzione
$$f(x,y) = \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$
è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quindi è integrabile su K che è un insieme compatto e misurabile contenuto in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.
Denotato con Φ il cambio di coordinate polari, risulta
$$\Phi^{-1}(K) = \left\{(r,\vartheta):\ 1/\cos\vartheta \leq r \leq 2 \text{ e } \vartheta \in [0,\pi/4]\right\}.$$
L'insieme $\Phi^{-1}(K)$ è semplice rispetto all'asse ϑ e la funzione
$$f \circ \Phi(r,\vartheta) J\Phi(r,\vartheta) = \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta, \qquad r > 0 \text{ e } \vartheta \in [0,\pi/4],$$
è continua e quindi integrabile su $\Phi^{-1}(K)$. Per la formula di cambiamento di variabili polari e per la formula di riduzione si ha allora
$$\begin{aligned} I &= \int_K \frac{xy}{(x^2+y^2)^{3/2}}\, dV_2(x,y) = \\ &= \int_{\Phi^{-1}(K)} \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\, dV_2(r,\vartheta) = \\ &= \int_0^{\pi/4} \left(\int_{1/\cos\vartheta}^2 \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta\, dr \right) d\vartheta = \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\vartheta\cos\vartheta \left(2 - \frac{1}{\cos\vartheta}\right) d\vartheta = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = 6\cos(3t) + 9t^2 + 11 \\ x(0) = 2 \text{ e } x'(0) = -3. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 9\lambda = 0$ e le sue soluzioni complesse sono $\lambda_\pm = \pm 3i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \cos(3t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \operatorname{sen}(3t)$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di una funzione trigonometrica e di un polinomio, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa considerando separatamente i due casi.
Nel caso della funzione trigonometrica $y_1(t) = \cos(3t)$, $t \in \mathbb{R}$, che è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluazione della forma

$$x_p(t) = t\left(A\cos(3t) + B\operatorname{sen}(3t)\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) + 9x_p(t) = -6A\operatorname{sen}(3t) + 6B\cos(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa con y_1 per $A = 0$ e $B = 1$.
Nel caso del polinomio $y_2(t) = 9t^2 + 11$, $t \in \mathbb{R}$, cerchiamo una soluazione della forma

$$x_p(t) = At^2 + Bt + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B, C \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) + 9x_p(t) = 2A + 9At^2 + 9Bt + 9C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa con y_2 per $A = 1$, $B = 0$ e $C = 1$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\cos(3t) + C_2\operatorname{sen}(3t) + t\operatorname{sen}(3t) + t^2 + 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 2$ e $x'(0) = -2$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 1 = 2 \\ x'(0) = 3C_2 = -3 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \cos(3t) + (t - 1)\operatorname{sen}(3t) + t^2 + 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$