COGNOME	________________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	________________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	_ _ _ _ _ _	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 17 APRILE 2019

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Quale tra le seguenti curve $\gamma_i\colon [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ è semplice e regolare?

(a) $\gamma_1(t) = \sqrt{3-t}e_1 + te_2$; (b) $\gamma_2(t) = t^3 e_1 - |t|^{3/2} e_2$; (b) $\gamma_3(t) = (t^3 - t)e_1 + \operatorname{sen}(\pi t)e_2$.

Soluzione. Le curve γ_1 e γ_2 sono semplici poiché hanno almeno una componente iniettiva mentre γ_3 non è tale poiché risulta $\gamma_3(0) = \gamma_3(1)$. Tutte tre le curve sono lisce ma risulta $\|\gamma_2'(0)\| = 0$ ed invece si ha $\|\gamma_1'(t)\| \geq 1$ per ogni t. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $\nabla f(0,1) = 2e_1 + e_2$ e sia γ la curva parametrica definita da $\gamma(t) = \cos(\pi t^2/2)e_1 + \operatorname{sen}(\pi t/2)e_2$ per $t \in [0,2]$. Allora, la derivata di $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0,2]$, in $t_0 = 1$ è

(a) $\varphi'(1) = -3\pi$; (b) $\varphi'(1) = -\pi$; (c) $\varphi'(1) = -2\pi$.

Soluzione. Poiché f è di classe C^1 e γ è una curva liscia, la funzione φ è di classe C^1 e la sua derivata è data da $\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t) \rangle$ per ogni t. Essendo $\gamma(1) = e_2$ e $\gamma'(1) = -\pi e_1$ risulta

$$\varphi'(1) = \langle \nabla f(\gamma(1)) \,|\, \gamma'(1) \rangle = \langle 2e_1 + e_2 \,|\, -\pi e_1 \rangle = -2\pi.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $\alpha \geq 0$. Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\operatorname{sen}(|x|^\alpha)y}{x^2+y^2}$

(a) se esiste vale 0; (b) esiste per $\alpha = 1$; (c) non esiste per $\alpha = 3$.

Soluzione. Sia $f(x,y)$ la funzione di cui si vuole calcolare il limite.
La prima affermazione è evidentemente vera poiché la funzione f è identicamente nulla sugli assi cartesiani. Inoltre, dalla disuguaglianza $|\operatorname{sen} t| \leq |t|$ valida per ogni t segue per

$$0 \leq |f(x,y)| = \left| \frac{\operatorname{sen}(|x|^\alpha)y}{x^2+y^2} \right| \leq \frac{|x|^\alpha |y|}{x^2+y^2}, \qquad (x,y) \neq (0,0),$$

e la funzione a destra ha limite se e solo se è $\alpha > 1$ nel qual caso il limite è zero. Quindi il limite esiste per $\alpha = 3$ e per controllare che (b) sia falsa è sufficiente osservare che per $\alpha = 1$ risulta $f(0,y) = f(x,0) = 0$ per ogni $x \neq 0$ e $y \neq 0$ e $f(t,t) = \operatorname{sen}|t|/2t$ per $t \neq 0$ che non ha limite per $t \to 0$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y)=x^2-y^2,\qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

e sia

$$K=\left\{(x,y):\ 2x^2+4xy+3y^2\le 6\right\}.$$

Determinate

(a) il minimo e il massimo globale di f su K;

(b) l'insieme immagine $f(K)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e l'insieme K è la parte di piano delimitata dall'ellisse di equazione

$$2x^2+4xy+3y^2=6$$

i cui assi sono le rette di equazione $(1\pm\sqrt{17})x-4y=0$ con semiassi di lunghezza $(5\pm\sqrt{17})/12$ rispettivamente. L'insieme K è chiuso perché controimmagine della semiretta chiusa $(-\infty,6]$ mediante il polinomio $q(x,y)=2x^2+4xy+3y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ed è limitato poiché la forma quadratica q che definisce l'ellisse è definita positiva e risulta

$$6\ge q(x,y)\ge\frac{5-\sqrt{17}}{12}\left(x^2+y^2\right),\qquad (x,y)\in K.$$

Pertanto K è compatto e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Per determinare tali punti osserviamo che l'unico punto critico di f è l'origine che risulta essere punto di sella. Conseguentemente, i punti di minimo e massimo globale devono trovarsi sul bordo

$$\partial K=\left\{(x,y):\ 2x^2+4xy+3y^2=6\right\}$$

di K che è una curva regolare nel piano e possiamo quindi cercare tali punti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases}2x-\lambda(4x+4y)=0\\ -2y-\lambda(4x+6y)=0\\ 2x^2+4xy+3y^2=6\end{cases}\qquad\Longleftrightarrow\qquad\begin{cases}(1-2\lambda)x-2\lambda y=0\\ 2\lambda x+(1+3\lambda)y=0\\ 2x^2+4xy+3y^2=6.\end{cases}$$

Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x=y=0$, deve essere

$$\det\begin{pmatrix}(1-2\lambda) & -2\lambda\\ 2\lambda & (1+3\lambda)\end{pmatrix}=-2\lambda^2+\lambda+1=0$$

e ciò avviene per $\lambda=-1/2$ e $\lambda=1$.
Nel primo caso $\lambda=-1/2$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti (x,y) tali che $y=-2x$. Imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti di coordinate $P_\pm=(\pm1,\mp2)$.
Nell'altro caso $\lambda=1$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti (x,y) tali che $y=-x/2$ e, imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti di coordinate $Q_\pm=(\pm2\sqrt{2},\mp\sqrt{2})$.
Risulta infine

$$f(P_\pm)=1-4=-3\qquad\text{e}\qquad f(Q_\pm)=8-2=6.$$

e conseguentemente il minimo globale di f su K è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.
L'ellisse che costituisce i bordo di K con i suoi assi e gli insiemi di livello $\{f=-3\}$, $\{f=6\}$ della funzione f sono rappresentati nella seguente figura.

(b) L'insieme K è convesso e quindi anche connesso cosicché per il teorema dei valori intermedi risulta

$$f(K)=[f(P_\pm),f(Q_\pm)]$$

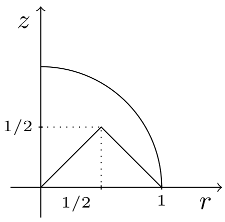
e dunque da (a) segue $f(K)=[-3,6]$.

Esercizio 5. Sia
$$K = \left\{(x,y,z) : \ \min\left\{\sqrt{x^2+y^2}, 1-\sqrt{x^2+y^2}\right\} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K z \, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione compresa tra i semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la circonferenza di equazione $r^2 + z^2 = \pi$ e il grafico della funzione $z = \min\{r, 1-r\}$ per $0 \le r \le 1$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi. La funzione
$$f(x,y,z) = z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
è lineare e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il quarto di cerchio
$$\pi_{xy}(K) = \{(x,y) : \ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } x,y \ge 0\}$$
che scriviamo con ovvio significato dei simboli come unione dei due insiemi non sovrapposti
$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y) : \ \sqrt{x^2+y^2} \le 1/2 \text{ e } x,y \ge 0\right\} \cup \left\{(x,y) : \ 1/2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \text{ e } x,y \ge 0\right\} = \pi_1 \cup \pi_2.$$
Per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento
$$K_{(x,y)} = \begin{cases} \left[\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}\right] & \text{se } (x,y) \in \pi_1 \\ \left[1-\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2}\right] & \text{se } (x,y) \in \pi_2. \end{cases}$$
Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_{\pi_1} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} z \, dz \right) dV_2(x,y) + \int_{\pi_2} \left(\int_{1-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} z \, dz \right) dV_2(x,y)$$
e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta
$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4} \int_0^{1/2} r \left[(1-r^2) - r^2\right] dr + \frac{\pi}{4} \int_{1/2}^1 r \left[(1-r^2) - (1-r)^2\right] dr = \\ &= \frac{\pi}{4} \int_0^{1/2} \left(r - 2r^3\right) dr + \frac{\pi}{2} \int_{1/2}^1 \left(r^2 - r^3\right) dr = \\ &= \frac{\pi}{4} \left(\frac{r^2}{2} - \frac{r^4}{2} \right)\Bigg|_0^{1/2} + \frac{\pi}{2} \left(\frac{r^3}{3} - \frac{r^4}{4} \right)\Bigg|_{1/2}^1 = \cdots = \frac{5\pi}{96}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t) + \dfrac{1}{x(t)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x + \frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

e quindi, tenuto conto della condizione $x(0) = 1$, possiamo considerare h come definita nel solo intervallo $(0, +\infty)$. La funzione h è infinite volte derivabile in tale intervallo cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha < 0 < \beta = \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(x) > 0$ per ogni $x > 0$, la soluzione massimale $x(t)$ verifica

$$\frac{x(t)x'(t)}{[x(t)]^2 + 1} = 1, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Ponendo

$$H(y) = \int_1^y \frac{z}{z^2+1}\, dz = \frac{1}{2} \log\left(z^2 + 1\right)\Big|_1^y = \frac{1}{2}\log\left(y^2+1\right) - \frac{1}{2}\log 2, \qquad y > 0,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \sqrt{2\mathrm{e}^{2t} - 1}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = -\log\sqrt{2} \\ \lim\limits_{y \to +\infty} H(y) = +\infty, \end{cases}$$

si conclude che risulta $\alpha = -\log\sqrt{2}$ e $\beta = +\infty$.
La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \sqrt{2\mathrm{e}^{2t} - 1}, \qquad t > -\log\sqrt{2}.$$