COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
MATRICOLA	⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌊ ⌋	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 23 GENNAIO 2019

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = xy/(x^2+2y^2+1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, in $(2,1)$ è

(a) $x - 6y + 49z = 10$; (b) $x - 6y + 49z = 14$; (c) $x - 6y + 7z = -24$.

Soluzione. Si ha $f(2,1) = 2/7$ e

$$f_x(2,1) = \left.\frac{y(x^2+2y^2+1) - 2x^2y}{(x^2+2y^2+1)^2}\right|_{x=2,y=1} = -1/49; \quad f_y(2,1) = \left.\frac{x(x^2+2y^2+1) - 4xy^2}{(x^2+2y^2+1)^2}\right|_{x=2,y=1} = 6/49;$$

da cui segue $z = -(x-2)/49 + 6(y-1)/49 + 2/7$ ovvero $x - 6y + 49z = 10$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 2. Sia E un insieme compatto e misurabile in $\mathbb{R}^2$ la cui misura è data in coordinate polari da

$$|E| = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\int_{1/|\cos\theta|}^{2} \rho \, d\rho \right) d\theta + \int_{2\pi/3}^{3\pi/4} \left(\int_{1/|\cos\theta|}^{2} \rho \, d\rho \right) d\theta.$$

Allora, E è

(a) convesso; (b) simmetrico rispetto all'asse y; (c) un poligono.

Soluzione. Per $\theta \in [\pi/4, \pi/3]$ o $\theta \in [2\pi/3, 3\pi/4]$ risulta $1/|\cos\theta| \le r \le 2$ e quindi in coordinate cartesiane l'insieme E si scrive nella forma

$$E = \left\{ (x,y) : \ 1 \le |x| \le y \le \sqrt{3}|x| \text{ e } x^2 + y^2 \le 4 \right\}.$$

La risposta corretta è quindi (b) e risulta $|E| = \pi/3 + 1 - \sqrt{3}$.

Esercizio 3. Quale tra le seguenti equazioni differenziali ha la funzione $x(t) = t^2 + e^{3t}$, $t \in \mathbb{R}$, come soluzione?

(a) $x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = 0$; (b) $x'(t) = 2tx(t) + 2t$; (c) $x''(t) - 3x'(t) = 2 - 6t$.

Soluzione. Le soluzioni fondamentali di (a) sono $x_1(t) = e^t$ e $x_2(t) = e^{3t}$ e tutte le soluzioni di (b) sono le funzioni $x(t) = ce^{t^2} - 1$ (c costante arbitraria) e quindi né (a) né (b) è la risposta corretta. Le soluzioni di (c) sono le funzioni $x(t) = c_1 + c_2e^{3t} + t^2$ (c_i costanti arbitrarie) e la risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = 2y^4 + x^2 + xy^2 - 2y^2 + 3x - 6, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Dopo averne giustificato l'esistenza, determinate massimo e minimo globali di f sull'insieme

$$K = \{(x,y) : \ y^2 - 4 \le x \le 0\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Inoltre, è simmetrica rispetto all'asse x: $f(x,y) = f(x,-y)$ per ogni (x,y). Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = 2x + y^2 + 3 \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 8y^3 + 2xy - 4y$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $2x + y^2 + 3 = 0$ e $y(4y^2 + x - 2) = 0$. Se $y = 0$, dalla prima equazione si ricava $y = -3/2$. Altrimenti, dalla seconda equazione si ricava $x = 2 - 4y^2$ e sostituendo nella prima equazione si ottiene $7y^2 - 7 = 0$ da cui segue $y = \pm 1$ e $x = -2$. I punti critici di f sono quindi tutti e soli i punti $P = (-3/2, 0)$ e $Q_\pm = (-2, \pm 1)$.
Le derivate seconde di f sono

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= 2 \\ f_{yy}(x,y) &= 24y^2 + 2x - 4 \end{aligned} \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 2y$$

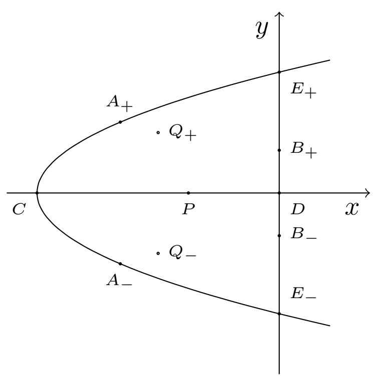
per ogni (x,y) e conseguentemente le matrici hessiane di f in P e $Q_\pm$ sono

$$D^2 f(-3/2, 0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -7 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D^2 f(-2, \pm 1) = \begin{pmatrix} 2 & \pm 2 \\ \pm 2 & 16 \end{pmatrix}.$$

Il punto P è evidentemente punto di sella mentre $Q_\pm$ sono punti di minimo locale (in effetti globale) poiché la relativa matrice hessiana a determinante positivo e traccia positiva.
(b) L'insieme K è la porzione di piano compresa tra la parabola $x = y^2 - 4$ e l'asse y come rappresentato nella figura sottostante. Esso è compatto poiché chiuso (intersezione di controimmagini mediante polinomi di intervalli chiusi) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K sono

$$\begin{aligned} \varphi_1(t) &= f(t^2 - 4, t) = 4t^4 - 11t^2 - 2, \qquad && |t| \le 2; \\ \varphi_2(t) &= f(0, t) = 2t^4 - 2t^2 - 6, && |t| \le 2. \end{aligned}$$

Tali funzioni hanno punti di minimo (interni) per $t = \pm\sqrt{11/8}$ e $t = \pm 1/\sqrt{2}$ rispettivamente ed entrambe hanno punti di massimo (interni) per $t = 0$ cui corrispondono i punti di coordinate $A_\pm = (-21/8, \pm\sqrt{11/8})$ e $B_\pm = (0, \pm 1/\sqrt{2})$ nel primo caso e $C = (-4, 0)$ e $D = (0, 0)$ nel secondo. Tenendo conto che i punti di minimo $Q_\pm$ sono punti interni di K e confrontando i valori assunti da f nei punti $Q_\pm$, $A_\pm$, $B_\pm$, C e D e nei punti $E_\pm = (0, \pm 2)$ si conclude che il minimo globale di f su K è assunto nei punti $Q_\pm$ dove risulta $f(Q_\pm) = -10$ e che il massimo globale è assunto nei punti $E_\pm$ dove risulta $f(E_\pm) = 18$.



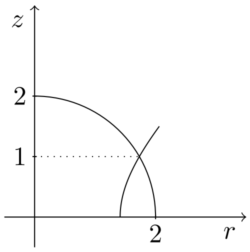
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x,y,z) :\ x^2+y^2 \le z^2+2,\ x^2+y^2+z^2 \le 4 \text{ e } x,y,z \ge 0\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xyz\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. A meno della condizione $x,y \ge 0$ l'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz compresa tra l'arco di circonferenza $r^2+z^2=4$ e l'arco di iperbole $r^2=z^2+2$ come illustrato in figura.



Le coordinate $(\sqrt{3},1)$ dell'intersezione tra cerchio e iperbole si trovano ponendo $r=\sqrt{x^2+y^2}$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r^2 = z^2+2 \\ r^2+z^2=4. \end{cases}$$

L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione con un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi integrabile su ogni insieme compatto e misurabile come K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione $\pi_z(K)$ di K sull'asse z l'intervallo $[0,2]$ e le corrispondenti sezioni K^z sono i (quarti di) cerchi

$$K^z = \begin{cases} \left\{(x,y) :\ \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{z^2+2} \text{ e } x,y \ge 0\right\} & \text{se } z \in [0,1] \\ \left\{(x,y) :\ \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-z^2} \text{ e } x,y \ge 0\right\} & \text{se } z \in [1,2]. \end{cases}$$

Poiché la proiezione $\pi_z(K)$ ed ogni sezione K^z sono insiemi misurabili e compatti ed f è continua su K, per la formula di riduzione si ha

$$I = \int_K xyz\, dV_3(x,y,z) = \int_0^1 \left(\int_{K^z} xyz\, dV_2(x,y) \right) dz + \int_1^2 \left(\int_{K^z} xyz\, dV_2(x,y) \right) dz.$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\int_{K^z} xy\, dV_2(x,y) = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{z^2+2}} r^3\, dr = \frac{1}{8}\left(z^2+2\right)^2, \qquad z \in [0,1];$$
$$\int_{K^z} xy\, dV_2(x,y) = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{4-z^2}} r^3\, dr = \frac{1}{8}\left(4-z^2\right)^2, \qquad z \in [0,1],$$

da cui segue infine con semplici calcoli

$$I = \frac{1}{8}\int_0^1 z\left(z^2+2\right)^2 dz + \frac{1}{8}\int_1^2 z\left(4-z^2\right)^2 dz = \frac{1}{16}\int_0^1 (u+2)^2\, du + \frac{1}{16}\int_1^4 (4-u)^2\, du = \frac{23}{24}.$$

Esercizio 6. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 \left([x(t)]^2 - 4\right) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

quando $x_0 = 1$ e quando $x_0 = 5$.

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 3t^2, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 - 4, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile in tale intervallo cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha < 0 < \beta = \beta \le +\infty$ per ogni dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(x) = 0$ solo per $x = \pm 2$, posto

$$J_{x_0} = (-\infty, -2); \qquad J_{x_0} = (-2, 2); \qquad J_{x_0} = (2, +\infty);$$

a seconda che sia $x_0 < -2$ o $-2 < x_0 < 2$ o $x_0 > 2$, per la soluzione massimale $x(t)$ corrispondente a $x_0 \neq \pm 2$ risulta $x(t) \in J_{x_0}$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$ per il teorema di unicità da cui segue

$$\frac{x'(t)}{[x(t)]^2 - 4} = 3t^2, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Ponendo

$$H(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{1}{z^2 - 4}\, dz = \frac{1}{4} \log \left| \frac{z-2}{z+2} \right| \Bigg|_{x_0}^{y} = \frac{1}{4} \log \left(\frac{y-2}{x_0 - 2} \right) - \frac{1}{4} \log \left(\frac{y+2}{x_0+2} \right), \qquad y \in J_{x_0},$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 3t^2$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t^3$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = 2 \frac{\left(\dfrac{x_0+2}{x_0-2} \right) + \mathrm{e}^{4t^3}}{\left(\dfrac{x_0+2}{x_0-2} \right) - \mathrm{e}^{4t^3}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$|x_0| < 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{y \to -2^+} H(y) = +\infty \\ \displaystyle\lim_{y \to 2^-} H(y) = -\infty, \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x_0 > 2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} \displaystyle\lim_{y \to 2^+} H(y) = -\infty \\ \displaystyle\lim_{y \to +\infty} H(y) = \frac{1}{4} \log \left(\frac{x_0+2}{x_0-2} \right), \end{cases}$$

si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$ se $|x_0| < 2$ e $\alpha = -\infty$ e

$$\beta = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \log \left(\frac{x_0+2}{x_0-2} \right)}$$

se $x_0 > 2$.
Le soluzioni corrispondenti a $x_0 = 1$ e $x_0 = 5$ risultano quindi essere rispettivamente

$$x(t) = 2 \frac{3 - \mathrm{e}^{4t^3}}{3 + \mathrm{e}^{4t^3}}, \quad t \in \mathbb{R}; \qquad \text{e} \qquad x(t) = 2 \frac{7 + 3\mathrm{e}^{4t^3}}{7 - 3\mathrm{e}^{4t^3}}, \quad t < \sqrt[3]{\frac{1}{4} \log \left(\frac{7}{3} \right)}.$$