COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 8 GENNAIO 2019

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Siano A, B e C gli insiemi definiti da

$$A = \left\{(x,y) : \, x^2 - 1 < y < x^2\right\}; \; B = \{(x,y) : \, (x-1)(y-1) < 0\}; \; C = \{(x,y) : \, x > 0 \text{ e } x + |y| < 1\}.$$

Quale delle segenti affermazioni è vera?

(a) A è limitato; (b) B è connesso; (c) C è convesso.

Soluzione. L'insieme A è illimitato poiché contiene tutti i punti (x,y) con $y = x^2 - 1/2$ e l'insieme B non è connesso perché unione di

$$B_1 = \{(x,y) : \, x > 1 \text{ e } y < 1\} \qquad \text{e} \qquad B_2 = \{(x,y) : \, x < 1 \text{ e } y > 1\}$$

che sono aperti disgiunti. Infine, disegnando l'insieme C, si verifica facilmente che è convesso. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. L'integrale curvilineo del campo $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x,y) = e^{3x}$ e $f^2(x,y) = 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, lungo la curva parametrica $\gamma(t) = \log(\cos t)e_1 + te_2$, $t \in [0, \pi/4]$, è

(a) $\displaystyle\int_\gamma f \cdot dl = \frac{5 + 4\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$; (b) $\displaystyle\int_\gamma f \cdot dl = \frac{5 - 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$; (c) $\displaystyle\int_\gamma f \cdot dl = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia, risulta

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_0^{\pi/4} \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_0^{\pi/4} \left(-\operatorname{sen} t \cos^2 t + 1\right) \, dt = \left(\frac{1}{3}\cos^3 t + t\right)\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1 - 2\sqrt{2}}{6\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $f(0,0) = -1$ e $\nabla f(0,0) = (2, -1/2)$. Allora, il gradiente di $1/f$ in $(0,0)$

(a) non si può calcolare; (b) è $\nabla(1/f)(0,0) = (-2, 1/2)$; (c) è $\nabla(1/f)(0,0) = (1/2, 2)$.

Soluzione. Poiché f è di classe C^1 con $f(0,0) \neq 0$, la funzione f è diversa da zero in un intorno di $(0,0)$ e quindi $1/f$ risulta essere di classe C^1 in tale intorno e si ha

$$\nabla(1/f)(0,0) = -\frac{\nabla f(0,0)}{[f(0,0)]^2} = (-2, 1/2).$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = x^2 - y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e sia

$$K = \left\{(x,y) : \, 7x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2 \leq 4\right\}.$$

Determinate

(a) il minimo e il massimo globale di f su K;

(b) l'insieme immagine $f(K)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e l'insieme K è la parte di piano delimitata dall'ellisse di equazione

$$7x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2 = 4$$

i cui assi sono le rette di equazione $(\sqrt{3} \pm 2\sqrt{7})x + 5y = 0$ con lunghezza dei corrispondenti semiassi $(5 \pm \sqrt{21})/2$. L'insieme K è chiuso perché controimmagine della semiretta chiusa $(-\infty, 4]$ mediante il polinomio $q(x,y) = 7x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ed è limitato poiché la forma quadratica q che definisce l'ellisse è definita positiva e risulta

$$4 \geq q(x,y) \geq \frac{5 - \sqrt{21}}{2}\left(x^2 + y^2\right), \qquad (x,y) \in K.$$

Pertanto K è compatto e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Per determinare tali punti osserviamo che l'unico punto critico di f è l'origine che risulta essere punto di sella. Conseguentemente, i punti di minimo e massimo globale x_m e x_M devono trovarsi sul bordo

$$\partial K = \left\{(x,y) : \, 7x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2 = 4\right\}$$

di K che è una curva regolare nel piano e possiamo quindi cercare il massimo e il minimo di f su ∂K con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x - \lambda(14x - 10\sqrt{3}y) = 0 \\ -2y - \lambda(26y - 10\sqrt{3}x) = 0 \\ 7x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2 = 4 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (1 - 7\lambda)x + 5\sqrt{3}\lambda y = 0 \\ 5\sqrt{3}\lambda x - (13\lambda + 1)y = 0 \\ 7x^2 - 10\sqrt{3}xy + 13y^2 = 4. \end{cases}$$

Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x = y = 0$, deve essere

$$\det\begin{pmatrix} (1 - 7\lambda) & 5\sqrt{3}\lambda \\ 5\sqrt{3}\lambda & -(13\lambda + 1) \end{pmatrix} = 16\lambda^2 - 6\lambda - 1 = 0$$

e ciò avviene per $\lambda = -1/8$ e $\lambda = 1/2$.
Nel primo caso $\lambda = -1/8$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti (x,y) tali che $y = \sqrt{3}x$. Imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti di coordinate $P_\pm = (\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$.
Nell'altro caso $\lambda = 1/2$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti (x,y) tali che $y = x/\sqrt{3}$ e, imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti di coordinate $Q_\pm = (\pm\sqrt{3}, \pm 1)$.
Risulta infine

$$f(P_\pm) = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad f(Q_\pm) = 3 - 1 = 2.$$

e conseguentemente il minimo globale di f su K è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.
Gli insiemi di livello $\{f = -1/2\}$, $\{f = 2\}$ e il bordo di K sono rappresentati nella seguente figura.
(b) L'insieme K è convesso e quindi anche connesso cosicché per il teorema dei valori intermedi risulta

$$f(K) = [f(P_\pm), f(Q_\pm)]$$

e dunque da (a) segue $f(K) = [-1/2, 2]$.

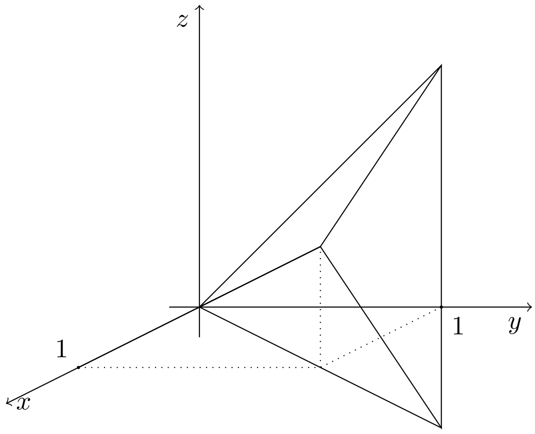
Esercizio 5. Sia

$$K = \{(x, y, z) : 2x - y \le z \le 2y - x \text{ e } 0 \le x, y \le 1\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xy \, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai semispazi $x \ge 0$, $y \le 1$, $z \ge 2x - y$ e $z \le 2y - x$. Esso è rappresentato nella figura seguente.



(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x, y, z) = xy, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo

$$T = \{(x, y) : 0 \le x \le y \le 1\}$$

e le corrispondenti sezioni sono i segmenti $[2x - y, 2y - x]$ per $(x, y) \in T$. Poiché la proiezione T e ogni sezione di K sono insiemi misurabili, per la formula di riduzione si ha

$$I = \int_T \left(\int_{2x-y}^{2y-x} xy \, dz \right) dV_2(x, y) = \int_T 3xy(y - x) \, dV_2(x, y)$$

e, riapplicando nuovamente la formula di riduzione al triangolo T, risulta infine

$$\begin{aligned} \int_T 3xy(y - x) \, dV_2(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 3xy(y - x) \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(xy^3 - \frac{3}{2} x^2 y^2 \right) \Big|_x^1 dx = \int_0^1 \left(x - \frac{3}{2} x^2 + \frac{1}{2} x^4 \right) dx = \frac{1}{10}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) = 6\mathrm{e}^{2t} - 3t^2 + 8t - 6 \\ x(0) = 3 \text{ e } x'(0) = 18. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di un esponenziale che non è soluzione dell'equazione omogenea e di un polinomio di secondo grado ed il coefficiente del termine proporzionale a $x(t)$ è nullo, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = A\mathrm{e}^{2t} + Bt^3 + Ct^2 + Dt, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - x_p'(t) = 2At\mathrm{e}^{2t} - 3Bt^2 + 2(3B - C)t + (2C - D), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = 3$, $B = 1$, $C = -1$ e $D = 4$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{2t} + t^3 - t^2 + 4t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 3$ e $x'(0) = 18$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + 3 = 3 \\ x'(0) = C_2 + 10 = 18 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = -8$ e $C_2 = 8$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = 8\mathrm{e}^t + 3\mathrm{e}^{2t} + t^3 - t^2 + 4t - 8, \qquad t \in \mathbb{R}.$$