Cognome	__________	Non scrivere qui	A
Nome	__________	1 2 3 4 5 6	
Matricola	__________		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2017-2018 — Parma, 19 Settembre 2018

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y^2 < x^2 - 2 \text{ e } y^2 > 4 - x^2\}$. Allora,

(a) E non ha assi di simmetria; (b) E non è aperto; (c) E è illimitato.

Soluzione. L'insieme E è aperto perché è intersezione di controimmagini di intervalli aperti mediante polinomi ed è evidentemente simmetrico rispetto agli assi x e y poiché $(x, y) \in E$ se e solo se $(\pm x, \pm y) \in E$ (tutte le combinazioni di segni). La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Il ponomio di Taylor di ordine due con centro nell'origine di $f(x, y) = x + 2y + \cos(xy)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, è

(a) $p(x, y) = 1+x+2y+x^2+y^2$; (b) $p(x, y) = 1+x+2y$; (c) $p(x, y) = 1+x+2y+x^2+2xy+y^2$.

Soluzione. Il polinomio di Taylor di f di ordine due con centro nell'origine è

$$p(x, y) = f(0,0) + \langle \nabla f(0,0) \,|\, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle + \frac{1}{2} \langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \,|\, D^2 f(0,0) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \rangle.$$

Calcolando le derivate parziali e la matrice hessiana di f in $(0, 0)$ si conclude che la risposta corretta è (b).

Esercizio 3. Per quali valori dei coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = 4e^{2t} - 5e^{-t} - 2$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione differenziale $x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$?

(a) $a = 0$, $b = -4$ e $c = 0$; (b) $a = -1$, $b = -2$ e $c = 0$; (c) $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$.

Soluzione. Calcolando le derivate di $x(t)$ risulta

$$\begin{aligned} x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) &= 32e^{2t} + 5e^{-t} + a(16e^{2t} - 5e^{-t}) + b(8e^{2t} + 5e^{-t}) + c(4e^{2t} - 5e^{-t} - 2) = \\ &= (32 + 16a + 8b + 4c)e^{2t} + 5(1 - a + b - c)e^{-t} - 2c \end{aligned}$$

e sostituendo ad a, b e c i valori forniti si conclude che la risposta corretta è (b).

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = x^2 + 2y^4 + 4xy + 2x + 4y + 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sul triangolo compatto di vertici $(1,0)$, $(1,2)$ e $(9,2)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = 2x + 4y + 2 \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 8y^3 + 4x + 4$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $x + 2y + 1 = 0$ e $2y^3 + 4x + 4 = 0$. Le soluzioni sono date da $x = -1$ e $y = 0$, da $x = -3$ e $y = 1$ e da $x = 1$ e $y = -1$ e quindi i punti critici di f sono i punti di coordinate $(-1,0)$, $(-3,1)$ e $1,-1)$. Le derivate parziali seconde di f sono
$$f_{xx}(x,y) = 2; \qquad f_{yy}(x,y) = 24y^2; \qquad \text{e} \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4;$$
per ogni (x,y) e quindi risulta
$$D^2 f(-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{e} \qquad D^2 f(-3,1) = D^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}.$$
La prima matrice ha determinante negativo e quindi il punto di coordinate $(-1,0)$ risulta essere punto di sella di f mentre la seconda ha determinante e traccia positive e quindi i punti di coordinate $(-3,1)$ e $(1,-1)$ risultano essere punti di minimo locale di f. Risulta inoltre $f(-3,1) = -3$ e $f(1,-1) = -2$ e quindi il punto di coordinate $(-3,1)$ è punto di minimo globale di f per il teorema di Weierstrass generalizzato poiché $f(x,y) \to +\infty$ per $(x,y) \to \infty$.
(c) Il triangolo di vertici $(1,0)$, $(1,2)$ e $(9,2)$ è
$$T = \left\{(x,y) :\ y \geq (x-1)/4,\ x \geq 1 \text{ e } y \leq 2\right\}.$$
Poiché T è compatto, la funzione f assume minimo e massimo globale su T per il teorema di Weierstrass. Non essendoci alcun punto critico di f all'interno di T, gli estremi globali di f su T devono essere assunti sul bordo di T. Il bordo di T è l'unione dei tre segmenti
$$\Gamma_1 = \left\{(x,y) :\ y = (x-1)/4 \text{ e } 0 \leq x \leq 9\right\}; \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y) :\ x = 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\right\};$$
$$\Gamma_3 = \left\{(x,y) :\ 1 \leq x \leq 9 \text{ e } y = 2\right\};$$
e le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di T sono
$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t,(t-1)/4) = (t-1)^4/128 + 2t^2 + 2t, && t \in [1,9]; \\ f_2(t) &= f(1,t) = 2t^4 + 8t + 4, && t \in [0,2]; \\ f_3(t) &= f(t,2) = t^2 + 8t + 41, && t \in [1,9]. \end{aligned}$$
Tutte le funzioni f_1, f_2 e f_3 sono evidentemente strettamente crescenti nei rispettivi domini. Pertanto, il minimo globale di f su T è assunto nel punto di coordinate $(1,0)$ in cui risulta $f(1,0) = 4$ ed il massimo globale è assunto nel punto di coordinate $(9,2)$ in cui risulta $f(9,2) = 212$

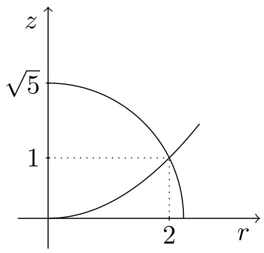
Esercizio 5. Sia

$$K = \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \le 5,\ x^2+y^2 \le 4z \text{ e } x,y \ge 0\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K 2xyz\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. A meno della condizione $x,y \ge 0$ l'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz compresa tra la parabola di equazione $4z = r^2$ ($r \ge 0$) e l'arco di circonferenza $r^2+z^2 = 5$ ($r,z \ge 0$) come illustrato in figura.



Le coordinate $(2,1)$ dell'intersezione tra cerchio e parabola si trovano ponendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r^2+z^2 = 5 \\ r^2 = 4z. \end{cases}$$

L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione con un cubo. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = 2xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y) : \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \text{ e } x,y \ge 0\right\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo $[(x^2+y^2)/4, \sqrt{5-x^2-y^2}]$. Poiché la proiezione $\pi_{xy}(K)$ ed ogni sezione $K_{(x,y)}$ sono insiemi misurabili e compatti ed f è continua su K, per la formula di riduzione si ha

$$\begin{aligned} I = \int_K 2xyz\, dV_3(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)/4}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} 2xyz\, dz \right) dV_2(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - \left(x^2+y^2\right) - \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{16} \right] dV_2(x,y). \end{aligned}$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - \left(x^2+y^2\right) - \frac{\left(x^2+y^2\right)^2}{16} \right] dV_2(x,y) &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^2 r^3 \left(5 - r^2 - \frac{r^4}{16}\right) dr = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 s\left(5 - s - s^2/16\right)\, ds \end{aligned}$$

da cui segue infine con semplici calcoli

$$I = \frac{1}{4} \int_0^4 s\left(5 - s - s^2/16\right)\, ds = \frac{1}{4} \left\{ \frac{5}{2}s^2 - \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{64} \right\}\Bigg|_0^4 = \frac{11}{3}.$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x(t)}{\log x(t)} \\ x(0) = \mathrm{e} \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{x}{\log x}, \qquad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

e quindi, tenuto conto della condizione $x(0) = \mathrm{e}$, possiamo considerare h come definita nel solo intervallo $(1,+\infty)$. La funzione h è infinite volte derivabile in tale intervallo cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha < 0 < \beta = \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(x) > 0$ per ogni $x > 1$, la soluzione massimale $x(t)$ verifica

$$\frac{x'(t)\log x(t)}{x(t)} = 1, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Ponendo

$$H(y) = \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\log z}{z}\,dz = \frac{1}{2}\log^2 z\Big|_{\mathrm{e}}^{y} = \frac{1}{2}\log^2 y - \frac{1}{2}, \qquad y > 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2t+1}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to 1^+} H(y) = -1/2 \\ \lim\limits_{y \to +\infty} H(y) = +\infty, \end{cases}$$

si conclude che risulta $\alpha = -1/2$ e $\beta = +\infty$.
La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2t+1}} \qquad t > -1/2.$$

COGNOME	________________________	
NOME	________________________	NON SCRIVERE QUI
MATRICOLA		1 2 3 4 5 6
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	B

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2017-2018 — PARMA, 19 SETTEMBRE 2018

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y^2 < x^2 - 2 \text{ e } y^2 > 4 - x^2\}$. Allora,

(a) E non ha assi di simmetria; (b) E non è aperto; (c) E è illimitato.

Soluzione. L'insieme E è aperto perché è intersezione di controimmagini di intervalli aperti mediante polinomi ed è evidentemente simmetrico rispetto agli assi x e y poiché $(x, y) \in E$ se e solo se $(\pm x, \pm y) \in E$ (tutte le combinazioni di segni). La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. L'integrale curvilineo del campo $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x, y) = xy + x$ e $f^2(x, y) = y^2 + x^2$ lungo la curva parametrica $\gamma(t) = (\cos t)e_1 + (\operatorname{sen} t)e_2$, $t \in [0, \pi/2]$, è uguale a

(a) 0; (b) 1/6; (c) $(3 + \pi)/2$.

Soluzione. Essendo γ una curva liscia ed essendo f un campo continuo, l'integrale curvilineo di f lungo γ è dato da

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_0^{\pi/2} \langle f(\gamma(t) \,|\, \gamma'(t)\rangle \, dt.$$

Si ha quindi

$$\begin{aligned}\int_\gamma f \cdot dl &= \int_0^{\pi/2} \{(\cos t \operatorname{sen} t + \cos t)(-\operatorname{sen} t) + \cos t\} \, dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos t \operatorname{sen}^2 t - \cos t \operatorname{sen} t + \cos t\right) \, dt = -\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t + \operatorname{sen} t\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. Per quali valori dei coefficienti $a, b, c \in \mathbb{R}$ la funzione $x(t) = 4e^{2t} - 5e^{-t} - 2$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione differenziale $x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) = 0$?

(a) $a = 0$, $b = -4$ e $c = 0$; (b) $a = -1$, $b = -2$ e $c = 0$; (c) $a = 1$, $b = 0$ e $c = -2$.

Soluzione. Calcolando le derivate di $x(t)$ risulta

$$\begin{aligned}x'''(t) + ax''(t) + bx'(t) + cx(t) &= 32e^{2t} + 5e^{-t} + a(16e^{2t} - 5e^{-t}) + b(8e^{2t} + 5e^{-t}) + c(4e^{2t} - 5e^{-t} - 2) = \\ &= (32 + 16a + 8b + 4c)e^{2t} + 5(1 - a + b - c)e^{-t} - 2c\end{aligned}$$

e sostituendo ad a, b e c i valori forniti si conclude che la risposta corretta è (b).

Esercizio 4. Sia
$$f(x\,,y) = x^2 + 2y^4 + 4xy + 2x + 4y + 1, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sul triangolo compatto di vertici $(1\,,0)$, $(1\,,2)$ e $(9\,,2)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x\,,y) = 2x + 4y + 2 \qquad \text{e} \qquad f_y(x\,,y) = 8y^3 + 4x + 4$$
per ogni $(x\,,y)$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $x + 2y + 1 = 0$ e $2y^3 + 4x + 4 = 0$. Le soluzioni sono date da $x = -1$ e $y = 0$, da $x = -3$ e $y = 1$ e da $x = 1$ e $y = -1$ e quindi i punti critici di f sono i punti di coordinate $(-1\,,0)$, $(-3\,,1)$ e $1\,,-1)$. Le derivate parziali seconde di f sono
$$f_{xx}(x\,,y) = 2; \qquad f_{yy}(x\,,y) = 24y^2; \qquad \text{e} \qquad f_{xy}(x\,,y) = f_{yx}(x\,,y) = 4;$$
per ogni $(x\,,y)$ e quindi risulta
$$D^2 f(-1\,,0) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \text{e} \qquad D^2 f(-3\,,1) = D^2 f(1\,,-1) = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 24 \end{pmatrix}.$$
La prima matrice ha determinante negativo e quindi il punto di coordinate $(-1\,,0)$ risulta essere punto di sella di f mentre la seconda ha determinante e traccia positive e quindi i punti di coordinate $(-3\,,1)$ e $(1\,,-1)$ risultano essere punti di minimo locale di f. Risulta inoltre $f(-3\,,1) = -3$ e $f(1\,,-1) = -2$ e quindi il punto di coordinate $(-3\,,1)$ è punto di minimo globale di f per il teorema di Weierstrass generalizzato poiché $f(x\,,y) \to +\infty$ per $(x\,,y) \to \infty$.
(c) Il triangolo di vertici $(1\,,0)$, $(1\,,2)$ e $(9\,,2)$ è
$$T = \left\{(x\,,y) :\ y \geq (x-1)/4,\ x \geq 1 \text{ e } y \leq 2\right\}.$$
Poiché T è compatto, la funzione f assume minimo e massimo globale su T per il teorema di Weierstrass. Non essendoci alcun punto critico di f all'interno di T, gli estremi globali di f su T devono essere assunti sul bordo di T. Il bordo di T è l'unione dei tre segmenti
$$\Gamma_1 = \left\{(x\,,y) :\ y = (x-1)/4 \text{ e } 0 \leq x \leq 9\right\}; \qquad \Gamma_2 = \left\{(x\,,y) :\ x = 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 2\right\};$$
$$\Gamma_3 = \left\{(x\,,y) :\ 1 \leq x \leq 9 \text{ e } y = 2\right\};$$
e le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di T sono
$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t\,,(t-1)/4) = (t-1)^4/128 + 2t^2 + 2t, && t \in [1\,,9];\\ f_2(t) &= f(1\,,t) = 2t^4 + 8t + 4, && t \in [0\,,2];\\ f_3(t) &= f(t\,,2) = t^2 + 8t + 41, && t \in [1\,,9]. \end{aligned}$$
Tutte le funzioni f_1, f_2 e f_3 sono evidentemente strettamente crescenti nei rispettivi domini. Pertanto, il minimo globale di f su T è assunto nel punto di coordinate $(1\,,0)$ in cui risulta $f(1\,,0) = 4$ ed il massimo globale è assunto nel punto di coordinate $(9\,,2)$ in cui risulta $f(9\,,2) = 212$

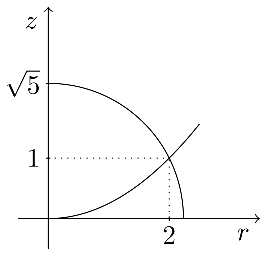
Esercizio 5. Sia

$$K = \{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 5,\ x^2+y^2 \le 4z \text{ e } x,y \ge 0\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K 2xyz\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. A meno della condizione $x,y \ge 0$ l'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz compresa tra la parabola di equazione $4z = r^2$ ($r \ge 0$) e l'arco di circonferenza $r^2+z^2=5$ ($r,z \ge 0$) come illustrato in figura.



Le coordinate $(2,1)$ dell'intersezione tra cerchio e parabola si trovano ponendo $r = \sqrt{x^2+y^2}$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r^2+z^2=5 \\ r^2=4z. \end{cases}$$

L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione con un cubo. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = 2xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \text{ e } x,y \ge 0\right\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo $[(x^2+y^2)/4, \sqrt{5-x^2-y^2}]$. Poiché la proiezione $\pi_{xy}(K)$ ed ogni sezione $K_{(x,y)}$ sono insiemi misurabili e compatti ed f è continua su K, per la formula di riduzione si ha

$$\begin{aligned} I = \int_K 2xyz\, dV_3(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)/4}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} 2xyz\, dz \right) dV_2(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - (x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{16} \right] dV_2(x,y). \end{aligned}$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - (x^2+y^2) - \frac{(x^2+y^2)^2}{16} \right] dV_2(x,y) &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^2 r^3 \left(5 - r^2 - \frac{r^4}{16} \right) dr = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 s\left(5 - s - s^2/16\right) ds \end{aligned}$$

da cui segue infine con semplici calcoli

$$I = \frac{1}{4} \int_0^4 s\left(5 - s - s^2/16\right) ds = \frac{1}{4} \left\{ \frac{5}{2}s^2 - \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{64} \right\}\Bigg|_0^4 = \frac{11}{3}.$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x(t)}{\log x(t)} \\ x(0) = \mathrm{e} \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{x}{\log x}, \qquad x \in (0,1) \cup (1,+\infty)$$

e quindi, tenuto conto della condizione $x(0) = \mathrm{e}$, possiamo considerare h come definita nel solo intervallo $(1,+\infty)$. La funzione h è infinite volte derivabile in tale intervallo cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha < 0 < \beta = \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(x) > 0$ per ogni $x > 1$, la soluzione massimale $x(t)$ verifica

$$\frac{x'(t)\log x(t)}{x(t)} = 1, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Ponendo

$$H(y) = \int_{\mathrm{e}}^{y} \frac{\log z}{z}\,dz = \frac{1}{2}\log^2 z\Big|_{\mathrm{e}}^{y} = \frac{1}{2}\log^2 y - \frac{1}{2}, \qquad y > 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2t+1}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to 1^+} H(y) = -1/2 \\ \lim\limits_{y \to +\infty} H(y) = +\infty, \end{cases}$$

si conclude che risulta $\alpha = -1/2$ e $\beta = +\infty$.
La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \mathrm{e}^{\sqrt{2t+1}} \qquad t > -1/2.$$