Cognome	______________	Non scrivere qui
Nome	______________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2017-2018 — Parma, 5 Settembre 2018

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $A = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, |x| - 4 \le y < \mathrm{e}^{-|x|} \text{ e } -3 \le x \le 2\Big\}$. Allora,

(a) è chiuso; (b) il punto $(1, 1/\mathrm{e})$ è punto di accumulazione di A; (c) è convesso.

Soluzione. L'insieme A non è chiuso poichè i punti (x,y) con $y = \mathrm{e}^{|x|}$ e $-3 \le x \le 2$ sono punti del bordo di A che non appartengono ad A. In particolare, sono tutti punti di accumulazione di A e tra essi vi è il punto di coordinate $(1, 1/\mathrm{e})$ corrispondente a $x = 1$. Inoltre, A non è convesso poiché la funzione $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$, $x \in \mathbb{R}$, è convessa in ciascun intervallo $(-\infty, 0]$ e $[0, +\infty)$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. Sia γ la curva parametrica definita da $\gamma(t) = (\pi t + \operatorname{sen}(\pi t))\, e_1 - t^2 e_2$ per $t \in \mathbb{R}$. Allora, il vettore normale n a γ in $t_0 = 1$ è

(a) $n = e_1$; (b) $n = e_1 - e_2$; (c) $n = -2e_2$.

Soluzione. La curva γ è liscia e il vettore tangente è $\gamma'(t) = (\pi + \pi\cos(\pi t))e_1 - 2te_2$ per ogni t. In $t_0 = 1$ risulta $\gamma'(1) = -2e_2$. Dei tre vettori proposti, solo il primo è perpendicolare al vettore tangente ed è dunque il vettore normale a γ in $t_0 = 1$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ definite da

$$\Phi^1(x,y) = x + \mathrm{e}^{-y} \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + x^2 - 3y$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora,

(a) $D\Phi(1,2)$ è simmetrica; (b) $D\Phi(1,0)$ è invertibile; (c) $J\Phi(4\pi, 1) > 0$.

Soluzione. Le derivate parziali di Φ sono date da

$$\partial_x\Phi^1(x,y) = 1; \quad \partial_y\Phi^1(x,y) = -\mathrm{e}^{-y}; \quad \partial_x\Phi^2(x,y) = y\cos(xy) + 2x; \quad \partial_y\Phi^2(x,y) = x\cos(xy) - 3;$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi le matrici gradiente di Φ nei punti considerati sono

$$D\Phi(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{e}^{-2} \\ -2\cos(2) + 2 & \cos(2) + 3 \end{pmatrix}; \quad D\Phi(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}; \quad D\Phi(1,2) = \begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{e}^{-1} \\ 3 & 4\pi + 3 \end{pmatrix}.$$

Di esse, la prima è evidentemente non simmetrica e la seconda non è invertibile poiché ha determinante nullo. Infine risulta $J\Phi(4\pi, 1) = 4\pi + 3 + 3/\mathrm{e} > 0$ e quindi la risposta corretta è (c).

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y,z) = x + y^2 + 2z^3/3, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sulla palla
$$B = \{(x,y,z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le sue derivate parziali sono date da
$$f_x(x,y,z) = 1; \qquad f_y(x,y,z) = 2y; \qquad f_z(x,y,z) = 2z^2$$
per ogni (x,y,z) e quindi non esistono punti critici di f.

(b) La palla B è un insieme compatto e quindi f assume minimo e massimo globale su B per il teorema di Weierstrass. Poiché f non ha punti critici in $\mathbb{R}^3$, il massimo e il minimo globali di f su B devono essere assunti in punti del bordo ∂B.

Per determinare tali punti osserviamo che si ha
$$\partial B = \{(x,y,z) : \ q(x,y,z) = 1\}$$
dove q denota il polinomio $q(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, e che il gradiente ∇q si annulla solo nell'origine. Pertanto, ∂B risulta essere una $2-$superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, nei punti di massimo e minimo di f su ∂B il gradiente $\nabla f = (1, 2y, 2z^3)$ di f deve essere parallelo al gradiente $\nabla q(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$.

I punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in cui $\nabla f(x,y,z)$ e $\nabla q(x,y,z)$ sono paralleli sono i punti (x,y,z) tali che risulti
$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & 2y & 2z^2 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix} \leq 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} y(1-2x) = 0 \\ z(1-2xz) = 0 \\ yz(1-z) = 0 \end{cases}.$$

Dalla prima equazione si ricava che deve essere $y = 0$ oppure $x = 1/2$. Nel primo caso, per le restanti equazioni deve essere $z = 0$ oppure $z \neq 0$ e $x = 1/2z$. Imponendo che i corrispondenti punti si trovino su ∂B si trovano i punti di coordinate
$$P_\pm = (\pm 1, 0, 0) \qquad \text{e} \qquad Q_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, 0 \pm 1/\sqrt{2}).$$

Nell'altro caso deve essere $x = 1/2$ e per le restanti equazioni deve essere $z = 0$ oppure $z = 1$. Imponendo che i corrispondenti punti si trovino su ∂B si trovano i punti di coordinate
$$R_\pm = (1/2, \pm\sqrt{3}/2, 0).$$

Nei punti così ottenuti risulta
$$f(P_\pm) = \pm 1; \qquad f(Q_\pm) = \pm\frac{4}{\sqrt{2}}; \qquad f(R_\pm) = 5/4;$$
da cui segue
$$\max_B f = f(Q_\pm) = 5/4 \qquad \text{e} \qquad \min_B f = f(P_-) = 1.$$

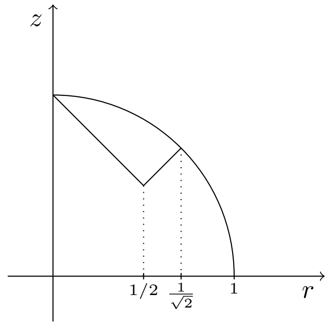
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) :\ \max\left\{ \sqrt{x^2+y^2}, 1-\sqrt{x^2+y^2} \right\} \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2} \text{ e } x, y \ge 0 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xy \, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione compresa tra i semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la circonferenza di equazione $r^2+z^2 = 1$ e il grafico della funzione $z = \max\{r, 1-r\}$ per $0 \le r \le 1$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi. La funzione

$$f(x, y, z) = xy, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio in $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x, y) : x^2+y^2 \le 1/\sqrt{2} \text{ e } x, y \ge 0 \right\}$$

che scriviamo con ovvio significato dei simboli come unione dei due insiemi non sovrapposti

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x, y) :\ \sqrt{x^2+y^2} \le 1/2 \text{ e } x, y \ge 0 \right\} \cup \left\{ (x, y) :\ 1/2 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1/\sqrt{2} \text{ e } x, y \ge 0 \right\} = \pi_1 \cup \pi_2.$$

Per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento

$$K_{(x,y)} = \begin{cases} \left[1-\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2} \right] & \text{se } (x, y) \in \pi_1 \\ \left[\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2} \right] & \text{se } (x, y) \in \pi_2. \end{cases}$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_1} \left(\int_{1-\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} xy \, dz \right) dV_2(x, y) + \int_{\pi_2} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{1-(x^2+y^2)}} xy \, dz \right) dV_2(x, y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{1/2} r^3 \left(\sqrt{1-r^2} - (1-r) \right) dr + \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} r^3 \left(\sqrt{1-r^2} - r \right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \int_0^{1/\sqrt{2}} r^3 \sqrt{1-r^2} \, dr - \int_0^{1/2} r^3 (1-r) \, dr - \int_{1/2}^{1/\sqrt{2}} r^4 \, dr \right) = \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{3} r^2 (1-r^2)^{3/2} + \frac{2}{15} (1-r^2)^{5/2} \Big|_0^{1/\sqrt{2}} + \left(\frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_0^{1/2} + \frac{1}{5} r^5 \Big|_{1/2}^{1/\sqrt{2}} \right\} = \cdots = \frac{25-16\sqrt{2}}{384}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 4x'(t) + 3x(t) = 4t\mathrm{e}^{-t} + 3t - 5 \\ x(0) = -1 \text{ e } x'(0) = -10. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda_1 = -3$ e $\lambda_2 = -1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-3t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t} + C_2\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di un polinomio moltiplicato per una soluzione dell'equazione omogenea e di un polinomio di primo grado, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = \left(At^2 + Bt\right)\mathrm{e}^{-t} + Ct + D, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - x_p'(t) - 2x_p(t) = 4At\mathrm{e}^{-t} + 2(A + B)\mathrm{e}^{-t} + 3Ct + (4C + 3D), \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ e $D = -3$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-3t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + \left(t^2 - t\right)\mathrm{e}^{-t} + t - 3, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 3 = -1 \\ x'(0) = -3C_1 - C_2 = -10 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 4$ e $C_2 = -2$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = 4\mathrm{e}^{-3t} + \left(t^2 - t - 2\right)\mathrm{e}^{-t} + t - 3, \qquad t \in \mathbb{R}.$$