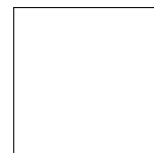


COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA _____
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2017-2018 — PARMA, 17 LUGLIO 2018

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. La lunghezza L della curva $\gamma(t) = te_1 + (t^2/8 - \log t)e_2$, $t \in [1, e]$, è

- (a) $L = (e^2 + 7)/8$; (b) $L = (e^2 - 9)/8$; (c) $L = (e^2 - 1)/8$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia, risulta

$$L(\gamma) = \int_1^e \|\gamma'(t)\| dt = \int_1^e \sqrt{1 + (t/4 - 1/t)^2} dt = \int_1^e \sqrt{(t/4 + 1/t)^2} dt = (t^2/8 + \log t) \Big|_1^e = \frac{e^2 + 7}{8}.$$

La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione con gradiente $\nabla f(1, 2) = (3, 2)$. Allora, la derivata direzionale $\partial_v f(1, 2)$ di f in $(1, 2)$ nella direzione del vettore $v = (-1, 4)$

- (a) non si può calcolare; (b) è $\partial_v f(1, 2) = 5$; (c) è $\partial_v f(1, 2) = (-3, 8)$.

Soluzione. Poiché f è di classe C^1 , risulta

$$\partial_v f(1, 2) = \langle \nabla f(1, 2) | v \rangle = -3 + 8 = 5.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. L'equazione differenziale $x''(t) - 4x(t) = t$ ha almeno una soluzione

- (a) periodica; (b) limitata; (c) avente asintoto obliquo per $t \rightarrow \pm\infty$.

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{2t} - t/4, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) costanti arbitrarie.

Indipendentemente dal valore di C_1 e C_2 , tali funzione sono non periodiche e illimitate. Inoltre, per $C_1 = C_2 = 0$ la soluzione è la funzione lineare $x(t) = -t/4$, $t \in \mathbb{R}$, che ha ovviamente asintoto obliquo per $t \rightarrow \pm\infty$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 4. Sia

$$f(x, y) = xye^{-(x^2+y^2)}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilite la natura.
(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sull'insieme

$$K = \{(x, y) : 0 \leq x \leq y \text{ e } x^2 + y^2 \leq 2\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le sue derivate parziali sono date da

$$f_x(x, y) = (y - 2x^2y) e^{-(x^2+y^2)} \quad \text{e} \quad f_y(x, y) = (x - 2xy^2) e^{-(x^2+y^2)}$$

per ogni (x, y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$y(1 - 2x^2) = 0 \quad \text{e} \quad x(1 - 2y^2) = 0.$$

Oltre alla soluzione $x = y = 0$, le altre soluzioni si hanno per $x = \pm 1/\sqrt{2}$ e $y = \pm 1/\sqrt{2}$ con tutte le combinazioni di segni. I punti critici di f sono quindi l'origine $(0, 0)$ e i quattro punti $P_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, \pm 1/\sqrt{2})$ e $Q_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$. Dall'esame del segno di f si determina immediatamente che l'origine è un punto di sella. Le derivate parziali seconde di f sono date da

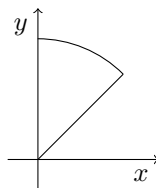
$$\begin{aligned} f_{xx}(x, y) &= -2xy(3 - 2x^2) e^{-(x^2+y^2)}; & f_{yy}(x, y) &= -2xy(3 - 2y^2) e^{-(x^2+y^2)}; \\ f_{xy}(x, y) &= f_{yx}(x, y) = [4x^2y^2 - 2(x^2 + y^2) + 1] e^{-(x^2+y^2)}; \end{aligned}$$

per ogni (x, y) e quindi risulta

$$D^2f(P_\pm) = \begin{pmatrix} -2/e & 0 \\ 0 & -2/e \end{pmatrix}; \quad \text{e} \quad D^2f(Q_\pm) = \begin{pmatrix} 2/e & 0 \\ 0 & 2/e \end{pmatrix}.$$

Pertanto, i punti P_\pm sono punti di massimo locale e i punti Q_\pm sono punti di minimo locale di f . È possibile poi mostrare che tali punti sono in effetti estremi globali di f .

(b) L'insieme K è rappresentato nella figura seguente.



Esso è compatto poiché chiuso (contiene il suo bordo) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Poiché non ci sono punti critici di f interni a K , il massimo ed il minimo globale di f su K devono trovarsi sul bordo di K . Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K sono

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t, t) = t^2 e^{-2t^2}, & t &\in [0, \sqrt{2}]; \\ f_2(t) &= f(\sqrt{2} \cos t, \sqrt{2} \sin t) = \frac{2}{e^2} \cos t \sin t, & t &\in [\pi/4, \pi/2]; \\ f_3(t) &= f(0, \sqrt{2} - t) = 0, & t &\in [0, \sqrt{2}]. \end{aligned}$$

La funzione f_2 è crescente in $[0, 1/\sqrt{2}]$ e decrescente nel rimanente intervallo $[1/\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ mentre f_2 è decrescente in $[\pi/4, \pi/2]$. Pertanto, il massimo globale di f su K è assunto in $P_+ = (1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ dove risulta $f(P_+) = 1/2e$ ed il minimo globale in tutti i punti di coordinate $[0, y]$ con $0 \leq y \leq \sqrt{2}$ in cui f si annulla.

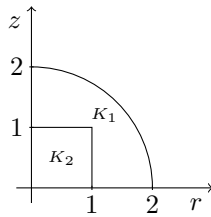
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) : x, y, z \geq 0, \max\{\sqrt{x^2 + y^2}, z\} \geq 1 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K .

(b) Calcolate $I = \int_K xy dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è la porzione contenuta nell'ottante $x, y, z \geq 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra la circonferenza di equazione $r^2 + z^2 = 4$ e il bordo del quadrato $\max\{r, z\} = 1$ come illustrato in figura.



L'insieme K è quindi formato dai punti (x, y, z) con coordinate $x, y, z \geq 0$ che sono inclusi nella sfera di equazione $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ e che sono al di fuori del cilindro di equazione $x^2 + y^2 = 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché risulta $K = K_1 \setminus (\text{int}(K_2))$ con

$$K_1 = \left\{ (x, y, z) : x, y, z \geq 0 \text{ e } x^2 + y^2 + z^2 \leq 4 \right\}$$

$$K_2 = \left\{ (x, y, z) : x, y \geq 0 \text{ e } \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1 \right\}$$

e la semipalla K_1 e il cilindro K_2 sono insiemi misurabili in quanto solidi di rotazione. Inoltre, la funzione $f(x, y, z) = xy$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è continua e quindi integrabile su ogni insieme compatto e misurabile.

Essendo il bordo di K_2 tascurabile, possiamo calcolare l'integrale di f su K come differenza degli integrali su K_1 e K_2 :

$$\int_K xy dV_3(x, y, z) = \int_{K_1} xy dV_3(x, y, z) - \int_{K_2} xy dV_3(x, y, z).$$

In coordinate sferiche l'insieme K_1 diviene

$$\Phi^{-1}(K_1) = \{ (r, \vartheta, \varphi) : 0 \leq r \leq 2, 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq \pi/2 \}$$

e quindi, per la formula di riduzione, l'integrale su K_1 risulta

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{K_1} xy dV_3(x, y, z) = \int_{\Phi^{-1}(K_1)} r^4 \cos \vartheta \sin \vartheta \sin^3 \varphi dV_3(r, \vartheta, \varphi) = \\ &= \int_0^2 r^4 dr \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \int_0^{\pi/2} \sin^3 \varphi d\varphi = \\ &= \frac{32}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\pi/2} (1 - \cos^2 \varphi) \sin \varphi d\varphi = \frac{16}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Per l'integrale su K_2 , integrando per strati e usando coordinate polari nel piano, si ha

$$I_2 = \int_{K_2} xy dV_3(x, y, z) = \int_0^1 \left(\int_0^1 r^3 dr \int_0^{\pi/2} \sin \vartheta \cos \vartheta d\vartheta \right) dz = \int_0^1 \frac{1}{8} dz = \frac{1}{8}.$$

Risulta pertanto $I = I_1 - I_2 = \frac{32}{5} - \frac{1}{8} = \frac{251}{40}$.

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) = e^t + 1 \\ x(0) = 2 \text{ e } x'(0) = 1. \end{cases}$$

- (a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.
(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1 \quad \text{e} \quad x_2(t) = e^t$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) costanti arbitrarie.

Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di soluzioni dell'equazione omogenea cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = Ate^t + Bt, \quad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha

$$x_p''(t) - x_p'(t) = Ae^t - B, \quad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = 1$ e $B = -1$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + te^t - t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) costanti arbitrarie.

(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 2$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 2 \\ x'(0) = C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = te^t + e^t + t - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$
