| | | | |
|---|---|---|---|
| COGNOME | ______________________ | NON SCRIVERE QUI | |
| NOME | ______________________ | 1 \| 2 \| 3 \| 4 \| 5 \| 6 | |
| MATRICOLA | ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋ | | |
| LAUREA | CIV AMB   GEST   INF ELN TLC   MEC | | |

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
## DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
## ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
## A.A. 2017-2018 — PARMA, 28 MARZO 2018

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

**Esercizio 1.** Sia $\gamma$ la curva parametrica definita da $\gamma(t) = \left(t + \mathrm{e}^t\right) e_1 - t^2 e_2$ per $t \in \mathbb{R}$. Allora, il vettore normale $n$ a $\gamma$ in $t_0 = 1$ è

(a) $n = (1+\mathrm{e})e_1 - 2e_2$;  (b) $n = 2e_1 + (1+\mathrm{e})e_2$;  (c) $n = (1+\mathrm{e})e_1 - e_2$.

---

**Soluzione.** La curva $\gamma$ è liscia e il vettore tangente in $t_0 = 1$ è $\gamma'(1) = (1+\mathrm{e})e_1 - 2e_2$. Dei tre vettori proposti, solo il secondo è perpendicolare al vettore tangente ed è dunque il vettore normale a $\gamma$ in $t_0 = 1$. La risposta corretta è quindi (b).

---

**Esercizio 2.** Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ una funzione avente un punto di minimo locale stretto nel punto $(0,0)$ con $f(0,0) = 0$. Quale tra i seguenti può essere il polinomio di Taylor di $f$ del secondo ordine in tale punto?

(a) $p(x,y) = x^2/2 + y^2 + xy$;  (b) $p(x,y) = x - y + x^2 + y^2$;  (c) $p(x,y) = x^2/2 - y^2 + xy$.

---

**Soluzione.** Il polinomio di Taylor di ordine due di $f$ nel punto di coordinate $(0,0)$ è definito da

$$p(x,y) = f(0,0) + f_x(0,0)x + f_y(0,0)y + \frac{1}{2}\left[f_{xx}(0,0)x^2 + 2f_{xy}(0,0)xy + f_{yy}(0,0)\right]$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Essendo $(0,0)$ un punto di minimo, le derivate parziali di $f$ che sono i coefficienti di $x$ e $y$ devono essere nulle e quindi (b) non può essere la risposta corretta. Le matrici hessiane di $f$ corrispondenti ai polinomi in (a) e (c) sono rispettivamente date da

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poiché la matrice $C$ ha determinante negativo, il corrispondente polinomio non può essere il polinomio di Taylor di $f$. Infine, la matrice $A$ ha determinante e traccia positive e quindi può essere la matrice hessiana di $f$ in $(0,0)$. La risposta corretta è quindi (a).

---

**Esercizio 3.** Quale delle seguenti equazioni differenziali ha come soluzione la funzione $x(t) = t\log t$, $t > 0$?

(a) $x'(t) = tx(t) + t$;  (b) $x'(t) = x(t)/t + 1$;  (c) $x'(t) = x(t) + 1$.

---

**Soluzione.** Si ha $x'(t) = \log t + 1$ per $t > 0$ e sostituendo nelle equazioni risulta

$$\begin{aligned} x'(t) - tx(t) - t\big|_{x(t)=t\log t} &= \log t + 1 - t^2\log t - t; \\ x'(t) - x(t)/t - 1\big|_{x(t)=t\log t} &= \log t + 1 - \log t - 1 = 0; \\ x'(t) - x(t) - 1\big|_{x(t)=t\log t} &= \log t + 1 - t\log t - 1 = \log t - t\log t. \end{aligned}$$

La risposta corretta è quindi (b).

**Esercizio 4.** Sia $a \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione e sia $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2)$ definito da

$$f^1(x,y) = 2xy^2 + ya(x) \qquad \text{e} \qquad f^2(x,y) = 2x^2y + a(x)$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinate tutte le funzioni $a \in C^1(\mathbb{R})$ che rendono il campo vettoriale $f$ conservativo.

(b) Per tali funzioni $a$, determinate i potenziali del corrispondente campo $f$.

(b) Determinate $a$ in modo che l'integrale curvilineo di $f$ lungo la curva

$$\gamma(t) = (\cos t)e_1 + 2(\operatorname{sen} t)e_2, \qquad t \in [0, \pi/2],$$

sia uguale a 1.

---

**Soluzione.** (a) Poiché $a \in C^1(\mathbb{R})$, il campo vettoriale $f$ è di classe $C^2$ in $\mathbb{R}^2$ e quindi, essendo il piano $\mathbb{R}^2$ convesso, è conservativo se e solo è irrotazionale. Si ha

$$f^1_y(x,y) = 4xy + a(x) \qquad \text{e} \qquad f^2_x(x,y) = 4xy + a'(x)$$

e quindi risulta $f^1_y(x,y) = f^2_x(x,y)$ per ogni $(x,y)$ se e solo se $a$ verifica

$$a'(x) = a(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, le funzioni $a$ che rendono conservativo il campo vettoriale $f$ sono tutte e sole le funzioni

$$a(x) = c\mathrm{e}^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(b) Per le funzioni $a$ che rendono conservativo il campo $f$ il relativo potenziale è dato da

$$F(x,y) = \int_0^x f^1(t,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t)\,dt = \int_0^y \left(2x^2t + c\mathrm{e}^x\right)\,dt = x^2y^2 + cy\mathrm{e}^x + C$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(c) Per le funzioni $a$ che rendono conservativo il campo $f$, l'integrale curvilineo di $f$ lungo la curva $\gamma$ è dato dalla differenza del potenziale calcolato negli estremi $\gamma(\pi/2) = 2e_2$ e $\gamma(0) = e_1$ di $\gamma$:

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(\gamma(\pi/2)) - F(\gamma(0)) = F(0,2) - F(1,0) = 2c.$$

Pertanto, affinché l'integrale sia uguale a 1, deve essere $c = 1/2$ e quindi la funzione $a$ corrispondente è $a(x) = \mathrm{e}^x/2$, $x \in \mathbb{R}$.

**Esercizio 5.** Considerate l'insieme

$$K = \left\{ (x, y, z) : \ x^2 + y^2 + z^2 \le \pi, \ 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2} \ \text{e} \ x, y \ge 0 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme $K$ e disegnatelo.

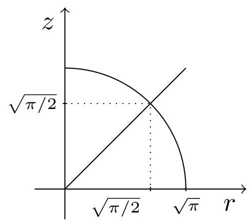
(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K z \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) dV_3(x, y, z)$.

---

**Soluzione.** L'insieme $K$ è formato dai punti di coordinate $x, y, z \ge 0$ tali che

$$x^2 + y^2 + z^2 \le \pi \qquad \text{e} \qquad 0 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}$$

e quindi è la porzione compresa tra i semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse $z$ la figura contenuta nel primo quadrante del piano $rz$ (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra la circonferenza di equazione $r^2 + z^2 = \pi$, la retta di equazione $z = r$ e l'asse delle ascisse come illustrato nella figura seguente.




Le coordinate $(\pi/\sqrt{2}, \pi/\sqrt{2})$ dell'intersezione tra circonferenza e retta si trovano ponendo $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ e risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = \pi \\ z = r. \end{cases}$$

L'insieme $K$ è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, $K$ è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi. La funzione

$$f(x, y, z) = z \operatorname{sen}\left(x^2 + y^2 + z^2\right), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua in $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile in $K$.
Denotato con $\Phi$ il cambio di coordinate sferiche in $\mathbb{R}^3$, risulta

$$\Phi^{-1}(K) = [0, \sqrt{\pi}] \times [0, \pi/2] \times [\pi/4, \pi/2].$$

L'insieme $\Phi^{-1}(K)$ è dunque un rettangolo in $\mathbb{R}^3$ e la funzione

$$f \circ \Phi(r, \vartheta, \varphi) J\Phi(r, \vartheta, \varphi) = r^3 \operatorname{sen}(r^2) \operatorname{sen}\vartheta \cos\vartheta \operatorname{sen}^3\varphi \cos\varphi, \qquad r \ge 0 \ \text{e} \ \vartheta, \varphi \in [0, 2\pi],$$

è continua e quindi integrabile su $\Phi^{-1}(K)$. Per la formula di cambiamento di variabili sferiche e per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}
I &= \int_{\Phi^{-1}(K)} r^3 \operatorname{sen}(r^2) \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, dV_3(r, \vartheta, \varphi) = \\
&= \int_0^{\sqrt{\pi}} r^3 \operatorname{sen}(r^2)\, dr \int_0^{\pi/2} 1 \, d\vartheta \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\varphi \cos\varphi \, d\varphi = \\
&= \frac{\pi}{2} \left( \frac{1}{2} \int_0^{\pi} t \operatorname{sen} t \, dt \right) \left( \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\varphi \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \right) = \\
&= \frac{\pi}{8} \left( \operatorname{sen} t - t \cos t \Big|_0^{\pi} \right) = \\
&= \frac{\pi^2}{8}.
\end{aligned}$$

**Esercizio 6.** Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^2 + [1 - x(t)]^2 \\ x(0) = x_0 \in \mathbb{R} \end{cases}$$

---

**Soluzione.** L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 + (1 - x)^2, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione $h$ è infinite volte derivabile in $\mathbb{R}$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(x) > 0$ per ogni $x \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale $x(t)$ verifica

$$\frac{x'(t)}{\big[x(t)\big]^2 + \big[1 - x(t)\big]^2} = 1, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Ponendo

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_{x_0}^{y} \frac{1}{z^2 + \big(1 - z\big)^2}\, dz = \int_{x_0}^{y} \frac{2}{(2z - 1)^2 + 1}\, dz = \arctan\big(2z - 1\big)\Big|_{x_0}^{y} = \\ &= \arctan\big(2y - 1\big) - \arctan\big(2x_0 - 1\big), \end{aligned}$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\tan\Big(t + \arctan\big(2x_0 - 1\big)\Big) + 1\right], \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\begin{cases} \displaystyle\lim_{y \to -\infty} H(y) = -\frac{\pi}{2} - \arctan\big(2x_0 - 1\big) \\ \displaystyle\lim_{y \to +\infty} H(y) = \frac{\pi}{2} - \arctan\big(2x_0 - 1\big), \end{cases}$$

si conclude che risulta

$$\begin{aligned} \alpha(x_0) &= -\frac{\pi}{2} - \arctan\big(2x_0 - 1\big) \\ \beta(x_0) &= \frac{\pi}{2} - \arctan\big(2x_0 - 1\big). \end{aligned}$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \frac{1}{2}\left[\tan\Big(t + \arctan\big(2x_0 - 1\big)\Big) + 1\right], \qquad \Big|t + \arctan\big(2x_0 - 1\big)\Big| < \frac{\pi}{2}.$$