COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	└─┴─┴─┴─┴─┴─┘	A
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2017-2018 — PARMA, 21 FEBBRAIO 2018

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ y(x^2 - 1) > 0\}$ è

(a) limitato; (b) connesso; (c) aperto.

Soluzione. L'insieme E non è limitato poiché ogni punto di coordinate $(0, y)$ con $y < 0$ appartiene a E e non è neppure connesso perch{'e è unione degli aperti disgiunti

$$E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| > 1 \text{ e } y > 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x| < 1 \text{ e } y < 0\} .$$

La risposta corretta è quindi (c) come si verifica osservando che E è aperto in quanto controimmagine dell'intervallo aperto $(0, +\infty)$ mediante il polinomio $p(x, y) = y(x^2 - 1)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = y/(x + 1)$, $x \neq -1$, sopra il punto di coordinate $(2, 3)$ è

(a) $2x - y - 3z = -2$; (b) $x - y + 3z = 2$; (c) $x - 2y + 3z = -1$.

Soluzione. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(2, 3)$ è

$$z = f(2, 3) + f_x(2, 3)(x - 2) + f_y(2, 3)(y - 3).$$

Si ha $f(2, 3) = 1$ e

$$f_x(2, 3) = -\frac{y}{(x + 1)^2}\Big|_{x=2, y=3} = -1/3 \qquad \text{e} \qquad f_y(2, 3) = \frac{1}{x + 1}\Big|_{x=2, y=3} = 1/3$$

da cui segue $z = -(x - 2)/3 + (y - 3)/3 + 1$ ovvero $x - y + 3z = 2$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. Quale delle seguenti equazioni differenziali ha come soluzione la funzione $x(t) = e^{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$?

(a) $x''(t) - 2x'(t) - x(t) = e^{t^2}$; (b) $x''(t) - 2tx'(t) - x(t) = e^{t^2}$; (c) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = e^{t^2}$.

Soluzione. Si ha $x'(t) = 2te^{t^2}$ e $x''(t) = (4t^2 + 2)\, e^{t^2}$ per ogni t e sostituendo nelle equazioni risulta

$$x''(t) - 2x'(t) - x(t)\big|_{x(t)=e^{t^2}} = (4t^2 - 4t + 1)\, e^{t^2};$$

$$x''(t) - 2tx'(t) - x(t)\big|_{x(t)=e^{t^2}} = e^{t^2};$$

$$x''(t) - x'(t) - 2x(t)\big|_{x(t)=e^{t^2}} = (4t^2 - 2t)\, e^{t^2}.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = 2x^2 + 6xy - 5y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sull'insieme
$$K = \left\{(x,y):\ 2x^2 - 2xy + 6y^2 \le 1\right\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio omogeneo di secondo grado e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le sue derivate parziali sono date da
$$f_x(x,y) = 4x + 6y \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 6x - 10y$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema lineare formato dalle equazioni $2x+3y = 0$ e $3x - 5y = 0$. Poiché il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è negativo, l'unico punto critico di f è l'origine $(0,0)$. Le derivate parziali seconde di f sono costanti e la matrice hessiana di f è
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 6 & -10 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$
Avendo tale matrice determinante negativo, l'origine risulta essere punto di sella di f.

(b) L'insieme K è la parte di piano delimitata dall'ellisse di equazione $2x^2 - 2xy + 6y^2 = 1$ i cui assi sono le rette di equazione $(\sqrt{5}+2)x + y = 0$ e $(\sqrt{5}-2)x - y = 0$ con lunghezza dei semiassi $a = 4 + \sqrt{5}$ e $b = 4 - \sqrt{5}$. L'insieme K è chiuso perché controimmagine dell'intervallo chiuso $(-\infty, 0]$ mediante il polinomio $q(x,y) = 2x^2 - 2xy + 6y^2 - 1$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, ed è limitato poiché risulta
$$1 \ge 2x^2 - 2xy + 6y^2 \ge 2x^2 - \left(x^2 + y^2\right)/2 + 6y^2 \ge 3x^2/2 + 11y^2/2 \ge 3\left(x^2 + y^2\right)/2$$
per ogni $(x,y) \in K$. Pertanto K è compatto e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. L'unico punto critico interno a K è l'origine che è punto di sella. Pertanto, il massimo e il minimo globali di f su K devono essere assunti in punti del bordo ∂K. Poiché il gradiente di q non si annulla su ∂K, il bordo di K è una curva regolare e possiamo quindi cercare il massimo e il minimo di f su ∂K con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è
$$\begin{cases} 4x + 6y - \lambda(4x - 2y) = 0 \\ 6x - 10y - \lambda(12y - 2x) = 0 \\ x^2 - 2xy + 6y^2 = 1 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x(1-\lambda) + y(3+\lambda) = 0 \\ x(3+\lambda) - y(5+6\lambda) = 0 \\ x^2 - 2xy + 6y^2 = 1. \end{cases}$$
Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x = y = 0$, deve essere
$$\det \begin{pmatrix} 2(1-\lambda) & 3+\lambda \\ 3+\lambda & -(5+6\lambda) \end{pmatrix} = 11\lambda^2 - 8\lambda - 19 = 0$$
e ciò avviene per $\lambda = -1$ e $\lambda = 19/11$.

Nel primo caso $\lambda = -1$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrnage sono i punti (x,y) tali che $4x+2y = 0$ ovvero $y = -2x$. Imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti $P_\pm = (\pm 1/\sqrt{30}, \mp 2/\sqrt{30})$.

Nell'altro caso $\lambda = 19/11$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrnage sono i punti (x,y) tali che $4x - 13y = 0$ ovvero $y = 4x/13$ e, imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti $Q_\pm = (\pm 13/\sqrt{330}, \pm 4/\sqrt{330})$.

Risulta infine
$$f(P_\pm) = -1 \qquad \text{e} \qquad f(Q_\pm) = 19/11.$$
e conseguentemente il minimo globale di f su K è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.

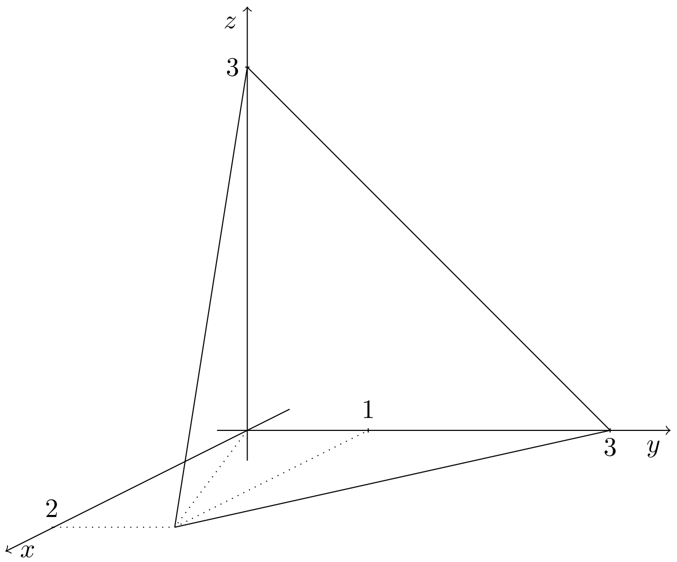
Esercizio 5. Sia

$$K = \{(x,y,z) : \ 0 \le x \le 2y \text{ e } 0 \le z \le 3-x-y\}.$$

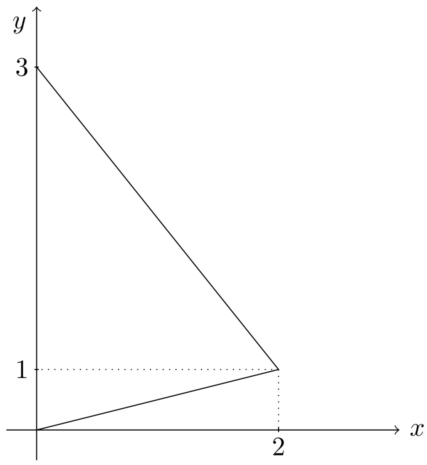
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K (x-y)\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai piani di equazione $x=0$, $x=2y$, $z=0$ e $z=3-x-y$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = x-y, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo compatto

$$\pi_{xy}(K) = \{(x,y) : \ 0 \le x \le 2y \text{ e } 0 \le 3-x-y\}$$

raffigurato in Figura (2) e la corrispondente sezione è l'intervallo $K_{(x,y)} = [0, 3-x-y]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{3-x-y} (x-y)\, dz \right) dV_2(x,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(y^2 - 3y - x^2 + 3x \right) dV_2(x,y)$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(y^2 - 3y - x^2 + 3x \right) dV_2(x,y) &= \int_0^2 \left(\int_{x/2}^{3-x} \left(y^2 - 3y - x^2 + 3x \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(3-x)^3 - \frac{3}{2}(3-x)^2 + \frac{35}{24}x^3 - \frac{57}{8}x^2 + 9x \right] dx = \\ &= -\frac{1}{12}(3-x)^4 + \frac{1}{2}(3-x)^3 + \frac{35}{96}x^4 - \frac{19}{8}x^3 + \frac{9}{2}x^2 \Big|_0^2 = \\ &= -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t\,\big[\cos\big(x(t)\big)\big]^2 \\ x(0) = \pi/4. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \cos^2 x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile in $(0,+\infty)$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché le soluzioni massimali relative ai dati iniziali $x(0) = \pm\pi/2$ sono ovviamente le funzioni costanti $x(t) = \pm\pi/2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, per la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = \pi/4$ risulta $|x(t)| < \pi/2$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{\big[\cos\big(x(t)\big)\big]^2} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_{\pi/4}^{y} \frac{1}{\cos^2 z}\,dz = \tan z\Big|_{\pi/4}^{y} = \tan y - 1, \qquad |y| < \pi/2,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H\circ x)'(t) = t^2/2$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H\circ x)(t) = \tan\big(x(t)\big) - 1 = t^2/2, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \arctan\big(t^2/2 + 1\big), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Restano infine da determinare α e β. Poiché si ha

$$\lim_{y\to(-\pi/2)^+} H(y) = \lim_{y\to(-\pi/2)^+} \big(\tan y - 1\big) = -\infty,$$
$$\lim_{y\to(\pi/2)^-} H(y) = \lim_{y\to(\pi/2)^-} \big(\tan y - 1\big) = +\infty,$$

si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \arctan\big(t^2/2 + 1\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Cognome	____________________	Non scrivere qui	B
Nome	____________________	1 2 3 4 5 6	
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2017-2018 — Parma, 21 Febbraio 2018

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'insieme $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y(x^2-1) > 0\}$ è

(a) limitato; (b) connesso; (c) aperto.

Soluzione. L'insieme E non è limitato poiché ogni punto di coordinate $(0,y)$ con $y<0$ appartiene a E e non è neppure connesso perch{'e è unione degli aperti disgiunti

$$E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|>1 \text{ e } y>0\} \cup \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ |x|<1 \text{ e } y<0\}.$$

La risposta corretta è quindi (c) come si verifica osservando che E è aperto in quanto controimmagine dell'intervallo aperto $(0,+\infty)$ mediante il polinomio $p(x,y) = y(x^2-1)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Esercizio 2. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x,y) = y/(x+1)$, $x \neq -1$, sopra il punto di coordinate $(2,3)$ è

(a) $2x-y-3z=-2$; (b) $x-y+3z=2$; (c) $x-2y+3z=-1$.

Soluzione. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(2,3)$ è

$$z = f(2,3) + f_x(2,3)(x-2) + f_y(2,3)(y-3).$$

Si ha $f(2,3)=1$ e

$$f_x(2,3) = -\frac{y}{(x+1)^2}\bigg|_{x=2,y=3} = -1/3 \qquad \text{e} \qquad f_y(2,3) = \frac{1}{x+1}\bigg|_{x=2,y=3} = 1/3$$

da cui segue $z = -(x-2)/3 + (y-3)/3 + 1$ ovvero $x-y+3z=2$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. Quale delle seguenti equazioni differenziali ha come soluzione la funzione $x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$, $t \in \mathbb{R}$?

(a) $x''(t) - 2x'(t) - x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$; (b) $x''(t) - 2tx'(t) - x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$; (c) $x''(t) - x'(t) - 2x(t) = \mathrm{e}^{t^2}$.

Soluzione. Si ha $x'(t) = 2t\mathrm{e}^{t^2}$ e $x''(t) = \left(4t^2+2\right)\mathrm{e}^{t^2}$ per ogni t e sostituendo nelle equazioni risulta

$$x''(t) - 2x'(t) - x(t)\big|_{x(t)=\mathrm{e}^{t^2}} = \left(4t^2-4t+1\right)\mathrm{e}^{t^2};$$
$$x''(t) - 2tx'(t) - x(t)\big|_{x(t)=\mathrm{e}^{t^2}} = \mathrm{e}^{t^2};$$
$$x''(t) - x'(t) - 2x(t)\big|_{x(t)=\mathrm{e}^{t^2}} = \left(4t^2-2t\right)\mathrm{e}^{t^2}.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia $a \in C^1(\mathbb{R})$ una funzione e sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2)$ definito da

$$f^1(x,y) = \frac{ya(x)}{1+y^2 e^{2x}} \qquad \text{e} \qquad f^2(x,y) = \frac{a(x)}{1+y^2 e^{2x}}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Determinate tutte le funzioni $a \in C^1(\mathbb{R})$ che rendono il campo vettoriale f conservativo.

(b) Per tali funzioni a, determinate i potenziali del corrispondente campo f.

(b) Determinate a in modo che l'integrale curvilineo di f lungo la curva

$$\gamma(t) = 2(\cos t)e_1 + (\operatorname{sen} t)e_2, \qquad t \in [0, \pi/2],$$

sia uguale a $\pi/4$.

Soluzione. (a) Poiché $a \in C^1(\mathbb{R})$, il campo vettoriale f è di classe C^2 in $\mathbb{R}^2$ e quindi, essendo il piano $\mathbb{R}^2$ convesso, è conservativo se e solo è irrotazionale. Si ha

$$f^1_y(x,y) = \frac{a(x)\left(1+y^2e^{2x}\right) - 2a(x)y^2e^{2x}}{\left(1+y^2e^{2x}\right)^2} \qquad \text{e} \qquad f^2_x(x,y) = \frac{a'(x)\left(1+y^2e^{2x}\right) - 2a(x)y^2e^{2x}}{\left(1+y^2e^{2x}\right)^2}$$

e quindi risulta $f^1_y(x,y) = f^2_x(x,y)$ per ogni (x,y) se e solo se a verifica

$$a'(x) = a(x), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, le funzioni a che rendono conservativo il campo vettoriale f sono tutte e sole le funzioni

$$a(x) = ce^x, \qquad x \in \mathbb{R},$$

con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(b) Per le funzioni a che rendono conservativo il campo f il relativo potenziale è dato da

$$F(x,y) = \int_0^x f^1(t,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t)\,dt = \int_0^y \frac{ce^x}{1+y^2e^{2x}}\,dt = c\arctan\left(ye^x\right) + C$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(c) Per le funzioni a che rendono conservativo il campo f, l'integrale curvilineo di f lungo la curva γ è dato dalla differenza del potenziale calcolato negli estremi $\gamma(\pi/2) = e_2$ e $\gamma(0) = 2e_1$ di γ:

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(\gamma(\pi/2)) - F(\gamma(0)) = F(0,1) - F(2,0) = c\frac{\pi}{4}.$$

Pertanto, affinché l'integrale sia uguale a $\pi/4$, deve essere $c = 1$ e quindi la funzione a corrispondente è $a(x) = e^x$, $x \in \mathbb{R}$.

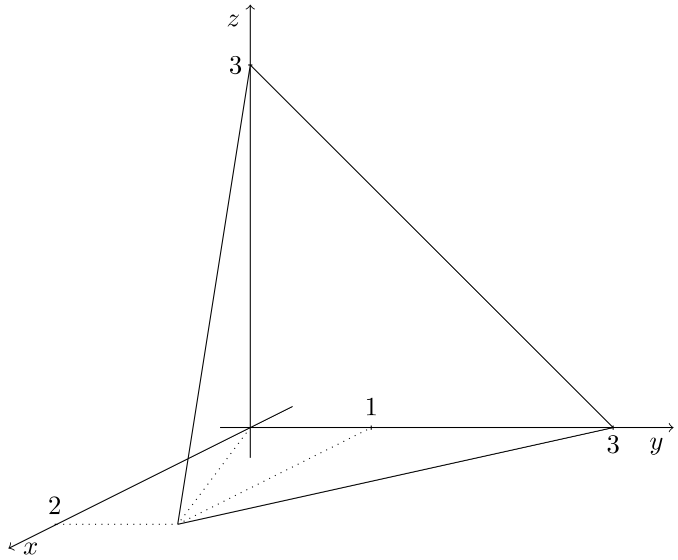
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x\,,y\,,z):\ 0 \le x \le 2y \text{ e } 0 \le z \le 3 - x - y\right\}.$$

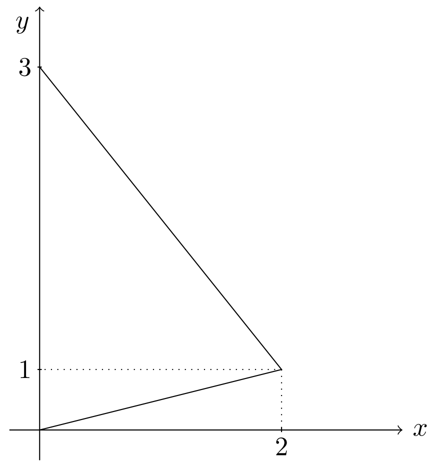
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K (x-y)\, dV_3(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai piani di equazione $x = 0$, $x = 2y$, $z = 0$ e $z = 3 - x - y$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x\,,y\,,z) = x - y, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo compatto

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,,y):\ 0 \le x \le 2y \text{ e } 0 \le 3 - x - y\right\}$$

raffigurato in Figura (2) e la corrispondente sezione è l'intervallo $K_{(x,y)} = [0\,, 3 - x - y]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{3-x-y} (x-y)\, dz\right) dV_2(x\,,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(y^2 - 3y - x^2 + 3x\right) dV_2(x\,,y)$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned}
I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(y^2 - 3y - x^2 + 3x\right) dV_2(x\,,y) &= \int_0^2 \left(\int_{x/2}^{3-x} \left(y^2 - 3y - x^2 + 3x\right) dy\right) dx = \\
&= \int_0^2 \left[\frac{1}{3}(3-x)^3 - \frac{3}{2}(3-x)^2 + \frac{35}{24}x^3 - \frac{57}{8}x^2 + 9x\right] dx = \\
&= -\frac{1}{12}(3-x)^4 + \frac{1}{2}(3-x)^3 + \frac{35}{96}x^4 - \frac{19}{8}x^3 + \frac{9}{2}x^2\Big|_0^2 = \\
&= -\frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t\,\big[\cos\big(x(t)\big)\big]^2 \\ x(0) = \pi/4. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \cos^2 x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile in $(0,+\infty)$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché le soluzioni massimali relative ai dati iniziali $x(0) = \pm\pi/2$ sono ovviamente le funzioni costanti $x(t) = \pm\pi/2$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, per la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = \pi/4$ risulta $|x(t)| < \pi/2$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{\big[\cos\big(x(t)\big)\big]^2} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_{\pi/4}^{y} \frac{1}{\cos^2 z}\,dz = \tan z\Big|_{\pi/4}^{y} = \tan y - 1, \qquad |y| < \pi/2,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = t^2/2$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H \circ x)(t) = \tan\big(x(t)\big) - 1 = t^2/2, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \arctan\big(t^2/2 + 1\big), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Restano infine da determinare α e β. Poiché si ha

$$\lim_{y \to (-\pi/2)^+} H(y) = \lim_{y \to (-\pi/2)^+} \big(\tan y - 1\big) = -\infty,$$
$$\lim_{y \to (\pi/2)^-} H(y) = \lim_{y \to (\pi/2)^-} \big(\tan y - 1\big) = +\infty,$$

si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \arctan\big(t^2/2 + 1\big), \qquad t \in \mathbb{R}.$$