COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2017-2018 — PARMA, 24 GENNAIO 2018

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. La lunghezza L della curva $\gamma(t) = te_1 + (t^2/8 - \log t)e_2$, $t \in [1, \mathrm{e}]$, è

(a) $L = (\mathrm{e}^2 + 7)/8$; (b) $L = (\mathrm{e}^2 - 9)/8$; (c) $L = (\mathrm{e}^2 - 1)/8$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia, risulta

$$L(\gamma) = \int_1^{\mathrm{e}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{1 + (t/4 - 1/t)^2}\, dt = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{(t/4 + 1/t)^2}\, dt = \left(t^2/8 + \log t\right)\Big|_1^{\mathrm{e}} = \frac{\mathrm{e}^2 + 7}{8}.$$

La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 2. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione con gradiente $\nabla f(1,2) = (3,2)$. Allora, la derivata direzionale $\partial_v f(1,2)$ di f in $(1,2)$ nella direzione del vettore $v = (-1,4)$

(a) non si può calcolare; (b) è $\partial_v f(1,2) = 5$; (c) è $\partial_v f(1,2) = (-3,8)$.

Soluzione. Poiché f è di classe C^1, risulta

$$\partial_v f(1,2) = \langle \nabla f(1,2) \,|\, v \rangle = -3 + 8 = 5.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. L'equazione differenziale $x''(t) - 4x(t) = t$ ha almeno una soluzione

(a) periodica; (b) limitata; (c) avente asintoto obliquo per $t \to \pm\infty$.

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} + C_2 \mathrm{e}^{2t} - t/4, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ costanti arbitrarie.
Indipendentemente dal valore di C_1 e C_2, tali funzione sono non periodiche e illimitate. Inoltre, per $C_1 = C_2 = 0$ la soluzione è la funzione lineare $x(t) = -t/4$, $t \in \mathbb{R}$, che ha ovviamente asintoto obliquo per $t \to \pm\infty$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sull'insieme

$$K=\left\{(x,y):\ 0\le x\le y \text{ e } x^2+y^2\le 2\right\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le sue derivate parziali sono date da

$$f_x(x,y)=\left(y-2x^2y\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y)=\left(x-2xy^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$y\left(1-2x^2\right)=0 \qquad \text{e} \qquad x\left(1-2y^2\right)=0.$$

Oltre alla soluzione $x=y=0$, le altre soluzioni si hanno per $x=\pm 1/\sqrt{2}$ e $y=\pm 1/\sqrt{2}$ con tutte le combinazioni di segni. I punti critici di f sono quindi l'origine $(0,0)$ e i quattro punti $P_\pm=(\pm 1/\sqrt{2},\pm 1/\sqrt{2})$ e $Q_\pm=(\pm 1/\sqrt{2},\mp 1/\sqrt{2})$. Dall'esame del segno di f si determina immediatamente che l'origine è un punto di sella. Le derivate parziali seconde di f sono date da

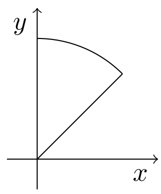
$$f_{xx}(x,y)=-2xy\left(3-2x^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}; \qquad f_{yy}(x,y)=-2xy\left(3-2y^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)};$$
$$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)=\left[4x^2y^2-2\left(x^2+y^2\right)+1\right]\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)};$$

per ogni (x,y) e quindi risulta

$$D^2f(P_\pm)=\begin{pmatrix}-2/\mathrm{e} & 0\\ 0 & -2/\mathrm{e}\end{pmatrix}; \qquad \text{e} \qquad D^2f(Q_\pm)=\begin{pmatrix}2/\mathrm{e} & 0\\ 0 & 2/\mathrm{e}\end{pmatrix}.$$

Pertanto, i punti $P_\pm$ sono punti di massimo locale e i punti $Q_\pm$ sono punti di minimo locale di f. È possibile poi mostrare che tali punti sono in effetti estremi globali di f.

(b) L'insieme K è rappresentato nella figura seguente.



Esso è compatto poiché chiuso (contiene il suo bordo) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Poiché non ci sono punti critici di f interni a K, il massimo ed il minimo globale di f su K devono trovarsi sul bordo di K. Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K sono

$$\begin{aligned}
&f_1(t)=f(t,t)=t^2\mathrm{e}^{-2t^2}, && t\in[0,\sqrt{2}];\\
&f_2(t)=f(\sqrt{2}\cos t,\sqrt{2}\operatorname{sen} t)=\frac{2}{\mathrm{e}^2}\cos t\operatorname{sen} t, && t\in[\pi/4,\pi/2];\\
&f_3(t)=f(0,\sqrt{2}-t)=0, && t\in[0,\sqrt{2}].
\end{aligned}$$

La funzione f_2 è crescente in $[0,1/\sqrt{2}]$ e decrescente nel rimanente intervallo $[1/\sqrt{2},\sqrt{2}]$ mentre f_2 è decrescente in $[\pi/4,\pi/2]$. Pertanto, il massimo globale di f su K è assunto in $P_+=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ dove risulta $f(P_+)=1/2\mathrm{e}$ ed il minimo globale in tutti i punti di coordinate $[0,y)$ con $0\le y\le\sqrt{2}$ in cui f si annulla.

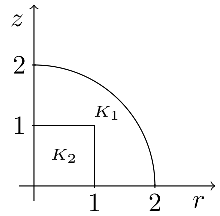
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x\,,y\,,z):\ x\,,y\,,z \geq 0,\ \max\{\sqrt{x^2+y^2}\,,z\} \geq 1 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\,dV_3(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è la porzione contenuta nell'ottante $x\,,y\,,z \geq 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la circonferenza di equazione $r^2+z^2 = 4$ e il bordo del quadrato $\max\{r\,,z\} = 1$ come illustrato in figura.



L'insieme K è quindi formato dai punti $(x\,,y\,,z)$ con coordinate $x\,,y\,,z \geq 0$ che sono inclusi nella sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$ e che sono al di fuori del cilindro di equazione $x^2+y^2 = 1$ e $0 \leq z \leq 1$.

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché risulta $K = K_1 \setminus (\mathrm{int}(K_2))$ con

$$K_1 = \left\{(x\,,y\,,z):\ x\,,y\,,z \geq 0 \text{ e } x^2+y^2+z^2 \leq 4\right\}$$
$$K_2 = \left\{(x\,,y\,,z):\ x\,,y \geq 0 \text{ e } \sqrt{x^2+y^2} \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1\right\}$$

e la semipalla K_1 e il cilindro K_2 sono insiemi misurabili in quanto solidi di rotazione. Inoltre, la funzione $f(x\,,y\,,z) = xy$, $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3$ è continua e quindi integrabile su ogni insieme compatto e misurabile. Essendo il bordo di K_2 tascurabile, possiamo calcolare l'integrale di f su K come differenza degli integrali su K_1 e K_2:

$$\int_K xy\,dV_3(x\,,y\,,z) = \int_{K_1} xy\,dV_3(x\,,y\,,z) - \int_{K_2} xy\,dV_3(x\,,y\,,z).$$

In coordinate sferiche l'insieme K_1 diviene

$$\Phi^{-1}(K_1) = \left\{(r\,,\vartheta\,,\varphi):\ 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \pi/2 \text{ e } 0 \leq \varphi \leq \pi/2\right\}$$

e quindi, per la formula di riduzione, l'integrale su K_1 risulta

$$\begin{aligned} I_1 = \int_{K_1} xy\,dV_3(x\,,y\,,z) &= \int_{\Phi^{-1}(K_1)} r^4 \cos\vartheta \,\mathrm{sen}\,\vartheta \,\mathrm{sen}^3\varphi\,dV_3(r\,,\vartheta\,,\varphi) = \\ &= \int_0^2 r^4\,dr \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}^3\varphi\,d\varphi = \\ &= \frac{32}{5}\cdot\frac{1}{2}\cdot\int_0^{\pi/2}\left(1-\cos^2\varphi\right)\mathrm{sen}\,\varphi\,d\varphi = \frac{16}{5}\cdot\frac{2}{3} = \frac{32}{15}. \end{aligned}$$

Per l'integrale su K_2, integrando per strati e usando coordinate polari nel piano, si ha

$$I_2 = \int_{K_2} xy\,dV_3(x\,,y\,,z) = \int_0^1 \left(\int_0^1 r^3\,dr \int_0^{\pi/2} \mathrm{sen}\,\vartheta\cos\vartheta\,d\vartheta\right) dz = \int_0^1 \frac{1}{8}\,dz = \frac{1}{8}.$$

Risulta pertanto $I = I_1 - I_2 = \dfrac{32}{5} - \dfrac{1}{8} = \dfrac{251}{40}$.

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) = \mathrm{e}^t + 1 \\ x(0) = 2 \text{ e } x'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1 \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di soluzioni dell'equazione omogenea cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = At\mathrm{e}^t + Bt, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha

$$x_p''(t) - x_p'(t) = A\mathrm{e}^t - B, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = 1$ e $B = -1$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t + t\mathrm{e}^t - t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 2$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 = 2 \\ x'(0) = C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = t\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t + t - 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$