COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	└─┴─┴─┴─┴─┴─┘	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2017-2018 — PARMA, 8 GENNAIO 2018

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'insieme $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1 \text{ e } x \leq 2 - |y|\} \setminus \{(0,0)\}$ è

(a) chiuso; (b) illimitato; (c) connesso.

Soluzione. L'insieme E non è chiuso poiché il punto di coordinate $(0,0)$ è punto di accumulazione di E ma non appartiene a E. Inoltre, risulta $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 3$ per ogni $(x, y) \in E$ e quindi E è limitato. La risposta corretta è quindi (c) come si verifica osservando che E è connesso per archi.

Esercizio 2. Sia γ la curva parametrica definita da $\gamma(t) = \big(t + \log(t+1)\big)e_1 + e_2/t$ per $t > 0$. Allora, il vettore normale n a γ in $t_0 = 1$ è

(a) $n = e_1 + \dfrac{3}{2}e_2$; (b) $n = \dfrac{3}{2}e_1 - e_2$; (c) $n = e_1 - e_2$.

Soluzione. La curva γ è liscia e il vettore tangente in $t_0 = 1$ è $\gamma'(1) = (3/2)e_1 - e_2$. Dei tre vettori proposti, solo il primo è perpendicolare al vettore tangente ed è dunque il vettore normale a γ in $t_0 = 1$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. Sia $f_\alpha(x, y) = \dfrac{(x^2)^\alpha - |y|^\alpha}{x^2 + y^2}$ per $(x, y) \neq (0,0)$ con $\alpha > 0$. Allora, il limite di f_α

(a) all'infinito esiste se e solo se $0 < \alpha < 2$;

(b) in $(1, 0)$ esiste se e solo se $\alpha \geq 1$;

(c) in $(0, 0)$ esiste se e solo se $\alpha > 2$.

Soluzione. Per $\alpha = 1$ si ha $f_1(x, 0) = 1$ per $x \neq 0$ e $f_1(0, y) = 1/|y|$ per $y \neq 0$ e quindi f_1 non ha limite all'infinito per $\alpha = 1$. Inoltre, la funzione f_α è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ per ogni $\alpha > 0$. La risposta corretta è quindi (c) come si verifica osservando che si ha

$$\frac{(x^2)^\alpha - |y|^\alpha}{x^2 + y^2} = \frac{(x^2)^\alpha}{x^2 + y^2} - \frac{|y|^\alpha}{x^2 + y^2}, \qquad (x, y) \neq (0,0),$$

e che il limite di ciascuna delle due funzioni a destra esiste se e solo se risulta $\alpha > 1$ e $\alpha > 2$ rispettivamente ovvero se e solo se risulta $\alpha > 2$.

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = x^2y^2 - 4x^2y - x^3/3, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ e $\{f = 0\}$.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

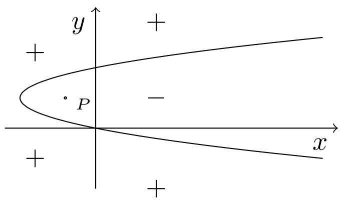
(c) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sull'insieme

$$K = \big\{(x,y) :\ 0 \le y \le x \le 3 \text{ e } xy \le 1\big\}.$$

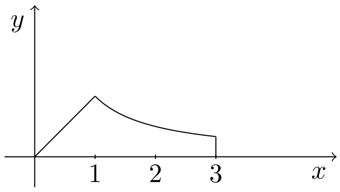
Soluzione. (a) Si ha $f(x,y) = x^2\big(y^2 - 4y - x/3\big)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e da ciò segue

$$\{f > 0\} = \big\{(x,y) :\ x < 3y^2 - 12y \text{ e } x \ne 0\big\};$$
$$\{f < 0\} = \big\{(x,y) :\ x > 3y^2 - 12y \text{ e } x \ne 0\big\};$$
$$\{f = 0\} = \big\{(x,y) :\ x = 3y^2 - 12y\big\} \cup \big\{(x,y) :\ x = 0\big\}.$$

Il segno di f è rappresentato in Figura (1) (assi non monometrici).



(1)



(2)

(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = 2xy^2 - 8xy - x^2 \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 2x^2y - 4x^2$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $2xy^2 - 8xy - x^2 = 0$ e $2x^2y - 4x^2 = 0$. Oltre alle soluzioni con $x = 0$ e $y \in \mathbb{R}$, per $x \ne 0$ dalla seconda equazione si ricava $y = 2$ e dalla prima $x = -8$. I punti critici di f sono quindi tutti e soli i punti della forma $(0,y)$ al variare di $x \in \mathbb{R}$ e il punto $P = (-8,2)$. Dall'esame del segno di f in Figura (1) si determina immediatamente la natura dei punti critici:

$(0,y)$ con $y < 0$ o $x > 4$:	punti di minimo locale (non globale);
$(0,y)$ con $0 < y < 4$:	punti di massimo locale (non globale);
$(0,y)$ con $y = 0$ o $y = 4$:	punti di sella;
$(-8,2)$:	punto di minimo locale (non globale).

(c) L'insieme K è rappresentato in Figura (2). Esso è compatto poiché chiuso (contiene il suo bordo) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Non essendoci alcun punto critico di f all'interno di K, gli estremi globali di f su K devono essere assunti sul bordo di K. Poiché K è contenuto nell'insieme in cui f è non negativa, il massimo globale di f su K è assunto nell'origine dove risulta $f(0,0) = 0$. Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K sono

$$f_1(t) = f(t,0) = -t^3/3, \qquad t \in [0,3];$$
$$f_2(t) = f(3,t) = 9t^2 - 36t - 9, \qquad t \in [0,1/3];$$
$$f_3(t) = f(1/t,t) = 1 - 4/t - 1/3t^3, \qquad t \in [1/3,1];$$
$$f_4(t) = f(1-t,1-t) = (1-t)^4 - 13(1-t)^3/3, \qquad t \in [0,1].$$

Le funzioni f_1 e f_2 sono strettamente decrescenti nei rispettivi domini mentre f_3 e f_4 sono strettamente crescenti. Pertanto, il minimo globale di f su K è assunto nel punto di coordinate $(3,1/3)$ in cui risulta $f(3,1/3) = -20$.

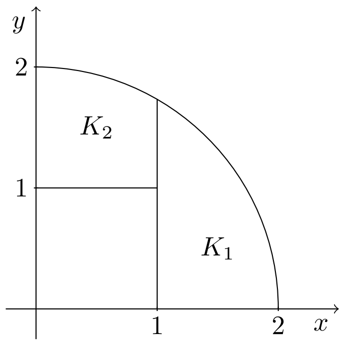
Esercizio 5. Calcolate

$$I = \int_K \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dV_2(x,y)$$

ove

$$K = \left\{(x,y):\ x,y \ge 0,\ \max\{x,y\} \ge 1 \text{ e } x^2+y^2 \le 4\right\}.$$

Soluzione. L'insieme K è rappresentato nella figura seguente:



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è unione dei due insiemi semplici e non sovrapposti

$$K = K_1 \cup K_2 = \left\{(x,y):\ 0 \le x \le 1 \text{ e } 1 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\} \cup \left\{(x,y):\ 1 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le \sqrt{4-x^2}\right\}.$$

La funzione

$$f(x,y) = \frac{y}{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x,y) \ne (0,0),$$

è continua in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e quindi integrabile su K.
Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}
I &= \int_{K_1} \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dV_2(x,y) + \int_{K_2} \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dV_2(x,y) = \\
&= \int_0^1 \left(\int_1^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dy\right) dx + \int_1^2 \left(\int_0^{\sqrt{4-x^2}} \frac{y}{(x^2+y^2)^2}\, dy\right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(-\frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\right)\Bigg|_1^{\sqrt{4-x^2}} dx + \int_1^2 \left(-\frac{1}{2\,(x^2+y^2)}\right)\Bigg|_0^{\sqrt{4-x^2}} dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{1}{2\,(1+x^2)} - \frac{1}{8}\right) dx + \int_1^2 \left(\frac{1}{2x^2} - \frac{1}{8}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2}\arctan x\Big|_0^1 - \frac{1}{2x}\Big|_1^2 - \frac{1}{4} = \\
&= \frac{\pi}{8} - \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \\
&= \frac{\pi}{8}.
\end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = x(t)\,\big[\log\left(x(t)\right) - 1\big]^2 \\ x(0) = \mathrm{e}^2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x(\log x - 1)^2, \qquad x \in (0,+\infty).$$

La funzione h è infinite volte derivabile in $(0,+\infty)$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = \mathrm{e}$ è ovviamente la funzione costante $x(t) = \mathrm{e}$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = \mathrm{e}^2 > \mathrm{e}$ verifica la disuguaglianza: $x(t) > \mathrm{e}$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{x(t)\,\big[\log\left(x(t)\right) - 1\big]^2} = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_{\mathrm{e}^2}^{y} \frac{1}{z\,(\log z - 1)^2}\,dz = -\frac{1}{\log z - 1}\bigg|_{\mathrm{e}^2}^{y} = 1 - \frac{1}{\log y - 1}, \qquad y > \mathrm{e},$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H \circ x)(t) = 1 - \frac{1}{\log x(t) - 1} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{t-2}{t-1}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Restano infine da determinare α e β. Poiché si ha

$$\lim_{y \to \mathrm{e}^+} H(y) = \lim_{y \to \mathrm{e}^+} \left(1 - \frac{1}{\log y - 1}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{y \to +\infty} H(y) = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{\log y - 1}\right) = 1,$$

si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = 1$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \mathrm{e}^{\frac{t-2}{t-1}}, \qquad t < 1.$$