COGNOME ____________	NON SCRIVERE QUI
NOME ____________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2016-2017 — PARMA, 18 SETTEMBRE 2017

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'insieme $A = \{(x, y) : \, 0 \le xy < 1\}$ è

(a) chiuso; (b) convesso; (c) connesso.

Soluzione. L'insieme A è connesso perché stellato rispetto all'origine. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. L'equazione del piano tangente al grafico della funzione $f(x, y) = \mathrm{e}^{x^2-y+1}$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ sopra il punto di coordinate $(1, 1)$ è

(a) $z = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}y$; (b) $z = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}y - 2\mathrm{e}$; (c) $z = 2\mathrm{e}x$.

Soluzione. L'equazione del piano tangente al grafico di f in $(1, 1)$ è

$$z = f(1, 1) + f_x(1, 1)(x - 1) + f_y(1, 1)(y - 1).$$

Si ha $f(1, 1) = \mathrm{e}$ e

$$f_x(1, 1) = 2x\mathrm{e}^{x^2-y+1}\Big|_{x=1,y=1} = 2\mathrm{e} \qquad \text{e} \qquad f_y(\pi, 1) = -\mathrm{e}^{x^2-y+1}\Big|_{x=1,y=1} = -\mathrm{e}$$

da cui segue $z = 2\mathrm{e}(x - 1) - \mathrm{e}(y - 1) + \mathrm{e}$ ovvero $z = 2\mathrm{e}x - \mathrm{e}y$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. Quale delle seguenti equazioni differenziali ha come soluzioni solo funzioni limitate in $\mathbb{R}$?

(a) $x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = 0$; (b) $x''(t) + 4x(t) = 0$; (c) $x''(t) - 4x(t) = 0$.

Soluzione. Le soluzioni delle equazioni sono della forma $x(t) = C_1x_1(t) + C_2x_2(t)$, $t \in \mathbb{R}$, con $x_i(t)$, $t \in \mathbb{R}$ soluzioni fondamentali e $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie e quindi tuttte le soluzioni di ciascuna equazione sono funzioni limitate se e solo se le corrispondenti soluzioni fondamentali sono limitate. Nei tre casi le soluzioni fondamentali sono

$$\begin{cases} x_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \\ x_2(t) = t\mathrm{e}^{2t} \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = \cos(2t) \\ x_2(t) = \operatorname{sen}(2t) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1(t) = 1 \\ x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}. \end{cases}$$

La risposta corretta è quindi (b).

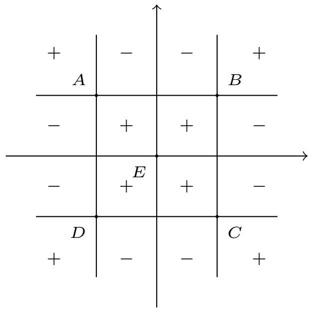
Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = x^2y^4 - y^4 - x^2 + 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ e $\{f = 0\}$.

(b) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

(c) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme
$$K = \big\{(x,y) : \ x^2 + y^4 \le 1 \text{ e } y \ge 0\big\}.$$

Soluzione. (a) Si ha
$$f(x,y) = x^2y^4 - y^4 - x^2 + 1 = \left(x^2 - 1\right)\left(y^4 - 1\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
e quindi risulta
$$\begin{aligned}
\{f > 0\} &= \big\{(x,y) : \ |x| < 1 \text{ e } |y| < 1\big\} \cup \big\{(x,y) : \ |x| > 1 \text{ e } |y| > 1\big\};\\
\{f < 0\} &= \big\{(x,y) : \ |x| > 1 \text{ e } |y| < 1\big\} \cup \big\{(x,y) : \ |x| < 1 \text{ e } |y| > 1\big\};\\
\{f = 0\} &= \big\{(x,y) : \ |x| = 1\big\} \cup \big\{(x,y) : \ |y| = 1\big\}.
\end{aligned}$$
Il segno di f è rappresentato nella figura seguente.



(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = 2xy^4 - 2x = 2x\left(y^4 - 1\right) \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 4x^2y^3 - 4y^3 = 4y^3\left(x^2 - 1\right)$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $2y(3-x-y) = 0$ e $x(6 - x - 4y) = 0$. Con facili calcoli si ricava che tutti e soli i punti critici di f sono i punti $A = (-1,1)$, $B = (1,1)$, $C = (1,-1)$, $D = (-1,-1)$ e $E = (0,0)$. Dall'esame del segno di f si ricava immediatamente che i punti A, B, C, D sono punti di sella mentre E è punto di massimo locale stretto di f.

(c) L'insieme K è compatto ed è contenuto nel quadrato compatto di vertici A, B, C e D. Su tale insieme, il minimo globale ed il massimo globale di f sono assunti nei punti del bordo e nel centro E rispettivamente. Poiché i punti di coordinate $(-1,0)$ e $(1,0)$ del bordo del quadrato appartengono a K e anche il punto E appartiene a K si conclude immediatamente che il minimo globale di f su K è assunto nei punti di coordinate $(-1,0)$ e $(1,0)$ dove f si annulla e il massimo globale di f su K è assunto in E dove risulta $f(0,0) = 1$.

Alternativamente, è possibile rappresentare il bordo di K come unione $\partial K = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ degli insiemi
$$\Gamma_1 = \big\{(x,0) : \ |x| \le 1\big\} \qquad \text{e} \qquad \Gamma_2 = \big\{(x,y) : \ x^2 + y^4 = 1 \text{ e } y \ge 0\big\}$$
e studiare l'andamento della restrizione di f a Γ_1
$$\varphi_1(x) = f(x,0) = 1 - x^2, \qquad |x| \le 1,$$
e della restrizione di f a Γ_2 che risulta essere
$$\varphi_2(x) = f(x, \sqrt[4]{1-x^2}) = -x^2\left(1 - x^2\right), \qquad |x| \le 1.$$

Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x, y, z):\ xyz \le 1,\ 0 \le x, y \le 2 \text{ e } 1/4 \le z \le 2\right\}.$$

Calcolate

$$I = \int_K 8xyz\, dV_3(x, y, z).$$

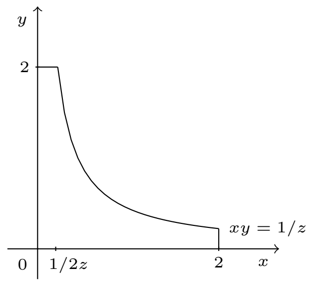
Soluzione. Il bordo di K è contenuto nell' unione finita di porzioni di iperpiani e di immagini mediante funzioni di classe C^1 di insiemi compatti di $\mathbb{R}^2$ (quali?) e quindi K è misurabile oltre ad essere evidentemente compatto. Inoltre, la funzione

$$f(x, y, z) = 8xyz, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l' integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull' asse z è l' intervallo $\pi_z(K) = [1/4, 2]$ e, per ogni $z \in [1/4, 2]$, la corrispondente sezione K^z è

$$K^z = \left\{(x, y):\ 0 \le x, y \le 2 \text{ e } xy \le 1/z\right\},$$

La sezione K^z di K per $1/4 \le z \le 2$ è rappresentata nella figura riportata a fianco.



Poiché la proiezione $\pi_z(K)$ ed ogni sezione K^z sono misurabili ed f è continua e limitata su K, per la formula di riduzione risulta

$$I = \int_K 8xyz\, dV_3(x, y, z) = \int_{1/4}^{2} \left(\int_{K^z} 8xyz\, dV_2(x, y)\right) dz.$$

Applicando nuovamente la formula di riduzione, per ogni $1/4 \le z \le 2$ si ha

$$\begin{aligned}\int_{K^z} 8xyz\, dV_2(x, y) &= \int_0^{1/2z} \left(\int_0^2 8xyz\, dy\right) dx + \int_{1/2z}^{2} \left(\int_0^{1/xz} xy\, dy\right) dx = \\ &= \int_0^{1/2z} 16xz\, dx + \int_{1/2z}^{2} 4/xz\, dx = \\ &= \frac{2}{z} - \frac{4}{z}\log z\end{aligned}$$

da cui segue infine

$$\begin{aligned}I = \int_{1/4}^{2} \left(\frac{2}{z} - \frac{4}{z}\log z\right) dz &= 2\log z\Big|_{1/4}^{2} - 2\log^2 z\Big|_{1/4}^{2} = \\ &= 2\log 2 + 4\log 2 - 2\log^2 2 + 8\log^2 2 = 6\log 2 + 6\log^2 2\end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -(\tan t)x(t) + \mathrm{e}^t \cos t, \\ x(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale con $t \in (-\pi/2, \pi/2)$.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine in cui deve essere $|t| < \pi/2$. Posto

$$A(t) = -\int \tan t \, dt = \log(\cos t), \qquad |t| < \pi/2,$$

tutte le sue soluzioni sono date da

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{A(t)} \int \mathrm{e}^{-A(t)} \cdot \mathrm{e}^t \cos t \, dt = \\ &= \cos t \int \frac{1}{\cos t} \cdot \mathrm{e}^t \cos t \, dt = \cos t \int \mathrm{e}^t \, dt = \cos t \cdot \left(\mathrm{e}^t + C\right) \end{aligned}$$

per ogni $t \in (-\pi/2, \pi/2)$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quindi, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = \left(\mathrm{e}^t + C\right) \cos t, \qquad |t| < \pi/2,$$

con C costante arbitraria.

(b) Imponendo che risulti $x(0) = 0$ si trova $C = -1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \left(\mathrm{e}^t - 1\right) \cos t, \qquad |t| < \pi/2.$$