COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	____________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6	
MATRICOLA	└┴┴┴┴┴┘		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2016-2017 — PARMA, 19 LUGLIO 2017

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia U l'insieme aperto definito da $U = \{(x, y) : y(x^2 - 1) > 0\}$ e sia $f \in C^1(U)$ una funzione tale che $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ per ogni $(x, y) \in U$. Allora, la funzione f

(a) è costante; (b) assume al più due valori distinti; (c) assume al più tre valori distinti.

Soluzione. L'insieme U è unione di tre insiemi aperti, connessi e disgiunti:

$$U_1 = \{(x, y) : y > 0 \text{ e } x < -1\}; \quad U_2 = \{(x, y) : y < 0 \text{ e } -1 < x < 1\}; \quad U_3 = \{(x, y) : y > 0 \text{ e } x > 1\}.$$

Su ciacuno di essi f è costante e dunque la funzione f può assumere al più tre valori distinti. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to\infty} \frac{x^2 + xy - y}{x^2 + y^2 + 1}$

(a) non esiste; (b) è uguale a 0; (c) è uguale a 1.

Soluzione. Risulta

$$f(x, 0) = \frac{x^2}{x^2 + 1} \to 1 \text{ per } x \to \pm\infty \qquad \text{e} \qquad f(0, y) = -\frac{y}{y^2 + 1} \to 0 \text{ per } y \to \pm\infty.$$

La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. Il vettore normale al grafico di $f(x, y) = 2x^2 + 3xy - y^2 + 2x - y - 1$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, sopra il punto di coordinate $(1, -1)$ è

(a) $n = (3, 4)$; (b) $n = (3, 4, 0)$; (c) $n = (3, 4, -1)$.

Soluzione. La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le sue derivate parziali nel punto di coordinate $(1, -1)$ sono

$$f_x(x, y)\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = 4x + 3y + 2\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = 3; \qquad f_y(x, y)\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = 3x - 2y - 1\Big|_{(x,y)=(1,-1)} = 4;$$

e dunque il vettore normale n al grafico di f sopra il punto di coordinate $(1, -1)$ è $n = (3, 4, -1)$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = xy(6-x-2y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f>0\}$, $\{f<0\}$ e $\{f=0\}$.

(b) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

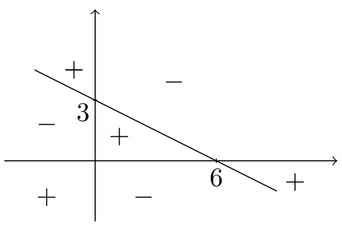
(c) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme

$$T = \big\{(x,y):\ x+2y \le 8 \text{ e } x,y \ge 0\big\}.$$

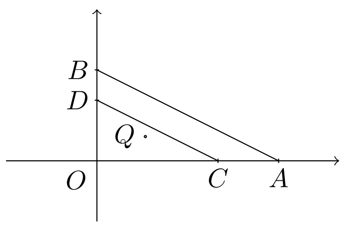
Soluzione. (a) Si ha

$$\begin{aligned}
\{f>0\} &= \big\{(x,y):\ xy>0 \text{ e } x+2y<6\big\} \cup \big\{(x,y):\ xy<0 \text{ e } x+2y>6\big\};\\
\{f<0\} &= \big\{(x,y):\ xy<0 \text{ e } x+2y<6\big\} \cup \big\{(x,y):\ xy>0 \text{ e } x+2y>6\big\};\\
\{f=0\} &= \big\{(x,y):\ y=0\big\} \cup \big\{(x,y):\ x=0\big\} \cup \big\{(x,y):\ x+2y=6\big\}.
\end{aligned}$$

Il segno di f è rappresentato in Figura 1.



(1)



(2)

(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = 2y(3-x-y) \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = x(6-x-4y)$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $2y(3-x-y)=0$ e $x(6-x-4y)=0$. Con facili calcoli si ricava che tutti e soli i punti critici di f sono i punti $P_1=(0,0)$, $P_2=(0,3)$, $P_3=(6,0)$ e $Q=(2,1)$. Dall'esame del segno di f si ricava immediatamente che i punti P_i $(i=1,2,3)$ sono punti di sella mentre Q è punto di massimo locale stretto di f.

(c) L'insieme T è il triangolo chiuso di vertici $O=(0,0)$, $A=(8,0)$ e $B=(0,4)$ rappresentato (non in scala) in Figura 2. Esso è ovviamente compatto poiché chiuso e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su T per il teorema di Weierstrass. L'unico punto critico di f nell'interno di T è il punto Q. Poiché nessun altro punto critico di f è interno a T, il minimo globale di f su T deve essere assunto sul bordo ∂T di T mentre il massimo globale di f su T può essere assunto in Q o in un punto del bordo di T.

Risulta $T = T_1 \cup T_2$ ove T_1 e T_2 sono il triangolo compatto di vertici O, C e D e il trapezio isoscele compatto di vertici A, B, D e C definiti da

$$T_1 = \big\{(x,y):\ x+2y \le 6 \text{ e } x,y \ge 0\big\}; \qquad T_2 = \big\{(x,y):\ 6 \le x+2y \le 8 \text{ e } x,y \ge 0\big\}.$$

Dall'esame del segno di f si ricava che risulta $f \ge 0$ in T_1 e $f_2 \le 0$ in T_2. Inoltre, f è nulla sul bordo di T_1 e quindi il punto $Q \in T_1$ è punto di massimo globale di f relativamente a T_1 e quindi anche relativamente a T. Infine, f non ha punti critici interni a T_2 e si annulla su tutto il bordo di T_2 ad eccezione del segmento Γ di estremi $A=(8,0)$ e $B=(0,4)$. Su tale segmento risulta $f(x,y) = -2xy$ per ogni punto $(x,y) \in \Gamma$ e da ciò segue facilmente che il minimo globale di f su T_2 è assunto nel punto di coordinate $P=(4,2)$ che risulta essere quindi anche punto di minomo globale di f su T.

I punti di minimo e di massimo globale di f su T sono dunque i punti $P=(4,2)$ e $Q=(2,1)$ ed in tali punti risaulta $f(4,2)=-16$ e $f(2,1)=4$.

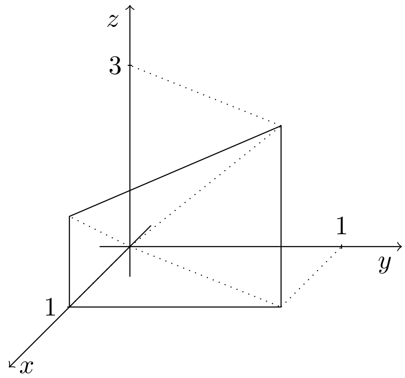
Esercizio 5. Sia

$$K = \{(x,y,z):\ 0 \le z \le x+2y \text{ e } 0 \le y \le x \le 1\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai piani di equazione $x = 1$, $y = 0$, $x = y$, $z = 0$ e $z = x + 2y$. Esso è rappresentato nella figura seguente.



(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = xy, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo compatto

$$\pi_{xy}(K) = \{(x,y):\ 0 \le y \le x \le 1\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo $K_{(x,y)} = [0, x+2y]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{x+2y} xy\, dz \right) dV_2(x,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} xy(x+2y)\, dV_2(x,y)$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} xy(x+2y)\, d\mu(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^x \left(x^2y + 2xy^2\right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(x^4/2 + 2x^4/3\right) dx = \\ &= \int_0^1 7x^4/6\, dx = 7/30. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{x(t)}{t} + 3\left(\dfrac{\log t}{t}\right)^2 \\ x(1) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Posto

$$A(t) = \int -\frac{1}{t}\,dt = \log 1/t, \qquad t > 0,$$

tutte le sue soluzioni sono date da

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{e}^{A(t)} \int 3\left(\frac{\log t}{t}\right)^2 \mathrm{e}^{-A(t)}\,dt = \\ &= \frac{1}{t}\int 3\left(\frac{\log t}{t}\right)^2 t\,dt = \frac{1}{t}\int \frac{3}{t}\log^2 t\,dt = \frac{1}{t}\left(\log^3 t + C\right) \end{aligned}$$

per ogni $t > 0$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quindi, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = \frac{1}{t}\left(\log^3 t + C\right), \qquad t > 0,$$

con C costante arbitraria.

(b) Imponendo che risulti $x(1) = 1$ si trova $C = 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = \frac{1}{t}\left(\log^3 t + 1\right), \qquad t > 0.$$