| | | |
|---|---|---|
| COGNOME | ______________________ | NON SCRIVERE QUI |
| NOME | ______________________ | 1 \| 2 \| 3 \| 4 \| 5 \| 6 |
| MATRICOLA | \|_\|_\|_\|_\|_\|_\| | |
| LAUREA | CIV AMB  GEST  INF ELN TLC  MEC | |

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2016-2017 — PARMA, 15 GIUGNO 2017

---

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

---

**Esercizio 1.** La lunghezza $L$ della curva $\gamma(t) = -t^3 e_1 + t^2 e_2$, $t \in [0,1]$, è

(a) $L = -\sqrt{13}/3$; (b) $L = 26\sqrt{13}/3$; (c) $L = (13\sqrt{13} - 8)/27$.

---

**Soluzione.** Poiché la curva $\gamma$ è liscia, risulta

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{9t^4 + 4t^2}\, dt = \int_0^1 3t\sqrt{t^2 + 4/9}\, dt = \left(t^2 + 4/9\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{27}\left(13\sqrt{13} - 8\right).$$

La risposta corretta è quindi (c).

---

**Esercizio 2.** Sia $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy) + x^2 + y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'equazione del piano tangente al grafico di $f$ sopra il punto di coordinate $(\pi, 1)$ è

(a) $(2\pi - 1)x + (1 - \pi)y - z = \pi^2 - 2\pi$; (b) $(2\pi - 1)x - z = \pi^2 - \pi - 1$; (c) $\pi x - z = 3y - 4$.

---

**Soluzione.** L'equazione del piano tangente al grafico di $f$ in $(\pi, 1)$ è

$$z = f(\pi,1) + f_x(\pi,1)(x - \pi) + f_y(\pi,1)(y - 1).$$

Si ha $f(\pi,1) = \pi^2 + 1$ e

$$f_x(\pi,1) = y\cos(xy) + 2x\Big|_{x=\pi, y=1} = 2\pi - 1 \qquad \text{e} \qquad f_y(\pi,1) = x\cos(xy) + 1\big|_{x=\pi, y=1} = 1 - \pi$$

da cui segue $z = (2\pi - 1)x - (\pi - 1)y - \pi^2 + 2\pi$. La risposta corretta è quindi (a).

---

**Esercizio 3.** Sia $E \subset \mathbb{R}^2$ un insieme misurabile la cui misura (area) è data dalla formula

$$|E| = \int_{\pi/4}^{\pi/3} \left( \int_{1/\cos\theta}^{2/\cos\theta} \rho\, d\rho \right) d\theta.$$

Quale tra i seguenti insiemi può essere $E$?

(a) $E = \left\{(x,y) :\ 1 \le x \le 2 \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$; (b) $E = \left\{(x,y) :\ 1 \le x^2 + y^2 \le 4 \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$;

(c) $E = [1,2] \times [\pi/4, \pi/3]$.

---

**Soluzione.** Per la fomula di riduzione e di cambiamento di variabili polari deve essere

$$E = \left\{(\rho\cos\theta, \rho\operatorname{sen}\theta) :\ 1 \le \rho\cos\theta \le 2 \text{ e } \pi/4 \le \theta \le \sqrt{3}\right\}$$

da cui segue $1 \le x \le 2$ e $y/x = \tan\theta \in [1, \sqrt{3}]$ ovvero $x \le y \le \sqrt{3}x$. La risposta corretta è quindi (a).

**Esercizio 4.** Sia
$$f(x,y,z) = x^2 + yz - 2x + y^2 z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate i punti critici di $f$ e stabilitene la natura;

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di $f$ sull'insieme
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ e } z = 1\right\}.$$

---

**Soluzione.** (a) La funzione $f$ è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di $f$ sono date da
$$f_x(x,y,z) = 2x - 2; \qquad f_y(x,y,z) = z(1+2y); \qquad f_z(x,y,z) = y(1+y);$$
per ogni $(x,y,z)$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni
$$2x - 2 = 0; \qquad z(1+2y) = 0; \qquad y(1+y) = 0;$$
Dalla prima equazione segue $x = 1$ e dalla terza equazione si ricava che deve essere $y = 0$ o $y = -1$. In entrambi i casi, la seconda equazione fornisce $z = 0$ e quindi i punti critici sono i punti di coordinate $P_1 = (1,0,0)$ e $P_2 = (1,-1,0)$.
Le derivate parziali seconde di $f$ sono
$$\begin{aligned} &f_{xx}(x,y,z) = 2; && f_{yy}(x,y,z) = 2z; && f_{zz}(x,y,z) = 0; \\ &f_{yx}(x,y,z) = f_{zx}(x,y,z) = 0; && f_{zy}(x,y,z) = f_{yz}(x,y,z) = 1 + 2y; && \end{aligned}$$
per ogni $(x,y,z)$ e quindi le matrici hessiane di $f$ nei due punti critici sono
$$D^2 f(1,0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad D^2 f(1,-1,0) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Entrambe hanno determinante negativo e traccia positiva e ciò implica che hanno due autovalori negativi e uno positivo. Conseguentemente, entrambi i punti critici $P_1$ e $P_2$ sono punti di sella.
(b) L'insieme $\Gamma$ è formato dall'intersezione della sfera di centro nell'origine e raggio $\sqrt{6}$ con il piano di equazione $z = 1$ o equivalentemente dall'intersezione del cilindro retto di equazione $x^2 + y^2 = 5$ con il piano $z = 1$:
$$\left\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 + z^2 = 6 \text{ e } z = 1\right\} = \Gamma = \left\{(x,y,z) :\ x^2 + y^2 = 5 \text{ e } z = 1\right\}.$$
Esso consiste quindi dei punti della circonferenza di centro in $(0,0,1)$ e raggio $\sqrt{5}$ giacente nel piano $z = 1$. L'insieme $\Gamma$ è chiuso poiché risulta $\Gamma = \left\{\Phi^1 = 0\right\} \cap \left\{\Phi^2 = 0\right\}$, essendo $\Phi^1$ e $\Phi^2$ i polinomi definiti da
$$\Phi^1(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 6 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y,z) = z - 1$$
per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ed è anche evidentemente limitato.
La funzione $f$ è un polinomio e quindi assume minimo e massimo globale su $\Gamma$ per il teorema di Weierstrass e, poiché su $\Gamma$ risulta
$$(x,y,z) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = y - 2x + 5,$$
è possibile determinare il minimo e il massimo globale di $f$ su $\Gamma$ determinando il minimo e il massimo globale della funzione lineare $g(x,y) = y - 2x$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, sulla circonferenza $C$ di equazione $x^2 + y^2 = 5$. Gli insiemi di livello di $g$ sono le rette $r_c$ di equazione $y - 2x = c$ al variare di $c \in \mathbb{R}$ e i valori minimo e massimo di $g$ su $C$ si ottengono in corrispondenza dei valori $c$ per i quali le rette $r_c$ sono tangenti a $C$. Ciò si ottiene per $c = \pm 5$ cui corrispondono i punti di $C$ di coordinate $(-2,1)$ e $(2,-1)$. In tali punti risulta $g(-2,1) = 5$ e $g(2,-1) = -5$ da cui segue
$$\min_\Gamma f = f(2,-1,1) = g(2,-1) + 5 = 0 \qquad \text{e} \qquad \max_\Gamma f = f(-2,1,1) = g(-2,1) + 5 = 10.$$

---

**Esercizio 5.** Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) : \ 2(x^2 + y^2) \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } 0 \le y \le x \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme $K$.

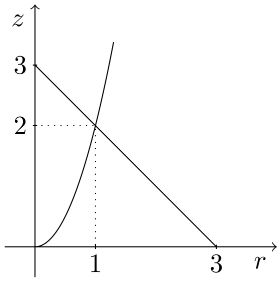
(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy \, dV_3(x, y, z)$.

---

**Soluzione.** (a) L'insieme $K$ è formato dai punti di coordinate $0 \le y \le x$ e $z \ge 0$ tali che

$$2(x^2 + y^2) \le z \le 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e quindi è la porzione compresa tra i semispazi $y \ge 0$ e $x \ge y$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse $z$ la figura contenuta nel primo quadrante del piano $rz$ (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra la parabola di equazione $z = 2r^2$ e la retta di equazione $z = 3 - r$ come illustrato in figura.




L'insieme $K$ è quindi formato dai punti $(x, y, z)$ con coordinate $0 \le y \le x$ che stanno al di sopra del paraboloide di equazione $z = 2(x^2 + y^2)$ e al di sotto del cono di equazione $z = 3 - \sqrt{x^2 + y^2}$.
(b) L'insieme $K$ è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è l'intersezione di un solido di rotazione e di un poliedro. Inoltre, la funzione $f(x, y, z) = xy$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è continua e quindi integrabile su ogni insieme compatto e misurabile come $K$.
Calcoliamo l'integrale di $f$ su $K$ mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di $K$ sul piano $xy$ è il cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1 \right\}$$

e per ogni $x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento $K_{(x,y)} = [2(x^2 + y^2), 3 - \sqrt{x^2 + y^2}]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left( \int_{2(x^2+y^2)}^{3-\sqrt{x^2+y^2}} xy \, dz \right) dV_2(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[ 3 - \sqrt{x^2 + y^2} - 2\left(x^2 + y^2\right) \right] dV_2(x, y) = \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} &= \int_0^{\pi/4} \left( \int_0^1 r^3 \cos\theta \operatorname{sen}\theta \left(3 - r - 2r^2\right) dr \right) d\theta = \\ &= \int_0^{\pi/4} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^1 r^3 \left(3 - r - 2r^2\right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\theta \Big|_0^{\pi/4} \cdot \left( \frac{3}{4} r^4 - \frac{1}{5} r^5 - \frac{1}{3} r^6 \right) \Big|_0^1 = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left( \frac{3}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} \right) = \\ &= \frac{13}{240}. \end{aligned}$$

**Esercizio 6.** Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \operatorname{sen}(x(t)) \tan(x(t)) \\ x(0) = \pi/4. \end{cases}$$

---

**Soluzione.** L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t\,,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \operatorname{sen} x \tan x, \qquad x \neq (2k+1)\pi/2 \quad (K \in \mathbb{Z}).$$

Essendo il dato iniziale $x_0 = \pi/4 > 0$, possiamo considerare $h$ definita nel solo intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. La funzione $h$ è infinite volte derivabile in $(-\pi/2, \pi/2)$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha\,,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = 0$ è ovviamente la funzione costante $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = \pi/4 > 0$ verifica la disuguaglianza: $0 < x(t) < \pi/2$ per ogni $t \in (\alpha\,,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{\operatorname{sen}(x(t))\tan(x(t))} = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_{\pi/4}^{y} \frac{1}{\operatorname{sen} z \tan z}\, dz = \int_{\pi/4}^{y} \frac{\cos z}{\operatorname{sen}^2 z}\, dz = -\frac{1}{\operatorname{sen} z}\bigg|_{\pi/4}^{y} = \sqrt{2} - \frac{1}{\operatorname{sen} y}, \qquad 0 < y < \pi/2,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha\,,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H \circ x)(t) = \sqrt{2} - \frac{1}{\operatorname{sen}(x(t))} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2} - t}\right), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Restano infine da determinare $\alpha$ e $\beta$. Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = \lim_{y \to 0^+} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\operatorname{sen} y}\right) = -\infty,$$
$$\lim_{y \to (\pi/2)^-} H(y) = \lim_{y \to (\pi/2)^-} \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\operatorname{sen} y}\right) = \sqrt{2} - 1,$$

si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = \sqrt{2} - 1$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{\sqrt{2} - t}\right), \qquad t < \sqrt{2} - 1.$$