Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Laurea   Civ Amb   Gest   Inf Eln Tlc   Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

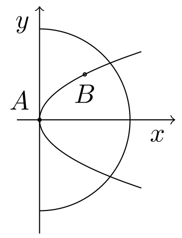
A.A. 2016-2017 — Parma, 21 Aprile 2017

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $K = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 9 \text{ e } 0 < x < y^2\}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?

(a) $(0, 0)$ è di accumulazione per K. (b) $(0, 1) \times \{1\} \subset K$. (c) $(1, 1)$ è interno a K.

Soluzione.



L'insieme K è rappresentato nella figura a fianco. I punti $A = (0, 0)$ e $B = (1, 1)$ non appartengono a K (appartengono al bordo di K). Quindi, l'affermazione (a) è vera e l'affermazione (c) è falsa. Inoltre, per $x \in (0, 1)$ risulta $x^2 + 1 \leq 9$ e $0 < x < 1$ e quindi il segmento $(0, 1) \times \{1\}$ è contenuto in K. L'affermazione falsa è quindi (c).

Esercizio 2. La curva di equazione polare $\rho(\theta) = \theta^2 \mathrm{e}^\theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$,

(a) è semplice e chiusa ma non è regolare. (b) non è semplice ma è chiusa e regolare.

(c) è semplice ma non è né chiusa né regolare. (d) è semplice e regolare ma non è chiusa.

Soluzione. Da $\rho(-\pi) \neq \rho(\pi)$ si deduce che γ non è chiusa e questo esclude le risposte (a) e (b). Inoltre, da $\|\gamma'(\theta)\|^2 = [\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2 = 0$ per $\theta = 0$ si ricava che γ non è regolare e questo esclude la risposta (d). Resta solo la risposta (c) e effettivamente γ è una curva semplice poiché risulta $\rho(\theta) = 0$ solo per $\theta = 0$ e $\rho(-\pi) \neq \rho(\pi)$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ una funzione con gradiente $\nabla f(1, 1) = (-3, 1)$. Per quale delle seguenti curve $\gamma \colon [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ la funzione $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, $t \in [0, 1]$, verifica la condizione $\varphi'(0) > 0$?

(a) $\gamma(t) = (\cos t, 1 + \operatorname{sen} t)$; (b) $\gamma(t) = (1 - t^2, 1 + t^3)$; (c) $\gamma(t) = (\mathrm{e}^t, 2t + 1)$.

Soluzione. Per tutte tre le curve γ risulta $\gamma(0) = (1, 1)$ mentre si ha $\gamma'(0) = (0, 1)$, $\gamma'(0) = (0, 0)$ e $\gamma'(0) = (1, 2)$ nei tre casi (a), (b) e (c). Per la formula della derivata della funzione composta si ha

$$\varphi'(0) = \langle \nabla f(1, 1), \gamma'(0) \rangle$$

e da ciò segue $\varphi'(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ e $\varphi'(0) = -1$ nei tre casi. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 4. Sia
$$K = \{(x, y, z) : 9x^2 + y^2 + z^2 - xy \le 5\}$$
e sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da
$$f(x, y, z) = x - 2y + z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate massimo e minimo globali di f su K.

(b) Determinate l'insieme $f(K)$.

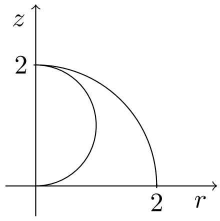
Soluzione. (a) L'insieme K è chiuso poiché risulta $K = \{\Phi \le 0\}$, essendo Φ il polinomio definito da
$$\Phi(x, y, z) = 9x^2 + y^2 + z^2 - xy - 5, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
ed è anche limitato poiché dalla disuguaglianza $xy \le (x^2 + y^2)/2$ valida per ogni x e y risulta
$$(x, y, z) \in K \qquad \Longrightarrow \qquad 5 \ge 9x^2 + y^2 + z^2 - xy \ge 17x^2/2 + y^2/2 + z^2 \ge (x^2 + y^2 + z^2)/2.$$
L'insieme K è formato dai punti (x, y, z) racchiusi dall'ellissoide di semiassi $a = 5 + \sqrt{65}/2$, $b = 5 - \sqrt{65}/2$ e $c = 1$ nelle direzioni delle rette individuate dai vettori
$$v_1 = (1, 8 - \sqrt{65}, 0); \qquad v_2 = (1, 8 + \sqrt{65}, 0); \qquad v_3 = (0, 0, 1).$$
La funzione f è lineare e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pertanto, f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Inoltre, si ha evidentemente
$$\begin{aligned} (x, y, z) \in K \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (-x, -y, -z) \in K \\ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \qquad &\Longrightarrow \qquad f(-x, -y, -z) = -f(x, y, z) \end{aligned}$$
e quindi i punti di minimo e di massimo globali sono antipodali e il minimo e il massimo globali opposti tra loro.
Per determinare tali punti osserviamo che il gradiente di f di non si annulla in alcun punto di $\mathbb{R}^3$ e quindi il massimo e il minimo globale di f su K devono essere assunti sul bordo ∂K. Poiché risulta $\partial K = \{\Phi = 0\}$ con $\nabla\Phi(x, y, z) \ne (0, 0, 0)$ in ogni punto $(x, y, z) \in \partial K$, l'insieme ∂K risulta essere una $2-$superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, nei punti di massimo e minimo il gradiente $\nabla f = (1, -2, 1)$ di f deve essere parallelo al gradiente
$$\nabla\Phi(x, y, z) = (18x - y, 2y - x, 2z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
di Φ. I punti $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ in cui ∇f e $\nabla\Phi(x, y, z)$ sono paralleli sono i punti (x, y, z) tali che risulti
$$\operatorname{rk}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 18x - y & 2y - x & 2z \end{pmatrix} \le 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{cases}$$
e quindi sono i punti della retta $(0, -2t, t)$ al variare di $t \in \mathbb{R}$. Imponendo che t sia tale che i corrispondenti punti appartengano a ∂K si trova che deve essere $t = \pm 1$ cui corrispondono i punti $P_\pm = (0, \pm 2, \mp 1)$ nei quali risulta
$$\min_K f = f(P_+) = -5 \qquad \text{e} \qquad \max_K f = f(P_-) = 5.$$
(b) L'insieme K è convesso, essendo un ellissoide, e quindi è connesso e la funzione f è continua. Risulta quindi $f(K) = [-5, 5]$ per il teorema dei valori intermedi.

Esercizio 5. Sia
$$K = \{(x,y,z) : 0 \le 2z \le x^2+y^2+z^2 \le 4 \text{ e } x,y \ge 0\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xy\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è formato dai punti di coordinate $x,y,z \ge 0$ tali che
$$x^2+y^2+(z-1)^2 \ge 1 \qquad \text{e} \qquad x^2+y^2+z^2 \le 4$$
e quindi è il quarto del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra le ciconferenze di equazioni $r^2+(z-1)^2 = 1$ e $r^2+z^2 = 4$ come illustrato in figura.



L'insieme K è quindi formato dai punti (x,y,z) con coordinate $x,y,z \ge 0$ compresi tra la superficie della sfera di equazione $x^2+y^2+(z-1)^2 = 1$ la superficie della sfera di equazione $x^2+y^2+z^2 = 4$.
(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è l'intersezione di un solido di rotazione e di un poliedro. Inoltre, la funzione $f(x,y,z) = xy$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è continua e quindi integrabile su ogni insieme compatto e misurabile come K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0,2]$ e la corrispondente sezione è la porzione di corona circolare
$$K^z = \left\{(x,y) : x,y \ge 0 \text{ e } \sqrt{2z-z^2} \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-z^2}\right\}, \qquad z \in [0,2].$$

Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_0^2 \left(\int_{K^z} xy\, dV_2(x,y) \right) dz$$
e, utilizzando coordinate polari nel piano, per ogni $0 \le z \le 2$ risulta
$$\int_{K^z} xy\, dV_2(x,y) = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_{\sqrt{2z-z^2}}^{\sqrt{4-z^2}} r^3\, dr = \frac{1}{8}\left[\left(4-z^2\right)^2 - \left(2z-z^2\right)^2 \right]$$
da cui segue infine
$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{8}\int_0^2 \left[\left(4-z^2\right)^2 - \left(2z-z^2\right)^2 \right] dz = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^2 \left(z^3 - 3z^2 + 4\right) dz = \\ &= 2. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - x'(t) - 2x(t) = t\mathrm{e}^{-t} - t + 1 \\ x(0) = 1/4 \text{ e } x'(0) = 25/18. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda - 2 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 2$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione sono date da

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{2t} + x_p(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie e $x_p(t)$ soluzione dell'equazione completa.
Cerchiamo una soluzione x_p dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = (At^2 + Bt)\mathrm{e}^{t} + Ct + D, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha

$$x_p''(t) - x_p'(t) - 2x_p(t) = (-6At + 2A - 3B)\mathrm{e}^{-t} - 2Ct - C - 2D \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A - 1/6$, $B = -1/9$, $C = 1/2$ e $D = -3/4$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{2t} - \left(\frac{t^2}{6} + \frac{t}{9}\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{2t-3}{4}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che risulti $x(0) = 1/4$ e $x'(0) = 25/18$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 3/4 = 2 \\ x'(0) = -C_1 + 2C_2 - 1/9 + 1/2 = 25/18 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t} - \left(\frac{t^2}{6} + \frac{t}{9} - 1\right)\mathrm{e}^{-t} + \frac{2t-3}{4}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$