Cognome ____________	Non scrivere qui
Nome ____________	1 2 3 4 5 6
Matricola	
Laurea Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2016-2017 — Parma, 22 Febbraio 2017

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. La lunghezza L della curva $\gamma(t) = 2te_1 + (\log t)e_2 + t^2 e_3$, $t \in [1, \mathrm{e}]$, è

(a) $L = \mathrm{e}^2 + \mathrm{e}^3/3 - 1/3$; (b) $L = \mathrm{e}$; (c) $L = \mathrm{e}^2$.

Soluzione. La curva γ è di classe C^∞ e la sua derivata è $\gamma'(t) = 2e_1 + (1/t)e_2 + 2te_3$, $t \in [1, \mathrm{e}]$. La lunghezza di γ è data allora da

$$L = \int_1^{\mathrm{e}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_1^{\mathrm{e}} \sqrt{4 + 1/t^2 + 4t^2}\, dt = \int_1^{\mathrm{e}} \frac{2t^2+1}{t}\, dt = t^2 + \log t \Big|_1^{\mathrm{e}} = \mathrm{e}^2.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Il dominio (massimale) D della funzione $f(x, y) = \sqrt{x^3 \log(x^2 + 4y^2)}$

(a) è convesso; (b) è limitato; (c) non è chiuso.

Soluzione. Il dominio D della funzione f è l'insieme

$$D = \left\{(x, y) :\ x \le 0 \text{ e } 0 < x^2 + 4y^2 \le 1\right\} \cup \left\{(x, y) :\ x \ge 0 \text{ e } x^2 + 4y^2 \ge 1\right\}.$$

ed è quindi formato dai punti (x, y) con $x \le 0$ che stanno all'interno dell'ellisse di equazione $x^2 + 4y^2 = 1$ con l'esclusione dell'origine e dai punti (x, y) con $x \ge 0$ che stanno fuori dalla stessa ellisse. L'insieme D non è quindi convesso nè limitato e non è chiuso poiché non contiene l'origine che è punto di accumulazione di D. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $f(x, y) = \mathrm{e}^x + xy + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'equazione del piano tangente al grafico di f sopra il punto di coordinate $(0, 2)$ è

(a) $3x - 4y + z = 3$; (b) $3x + 4y - z = 3$; (c) $2x - y + z = 3$.

Soluzione. Si ha $f(0, 2) = 5$ e

$$f_x(0, 2) = \mathrm{e}^x + y|_{x=0,y=2} = 3 \qquad \text{e} \qquad f_y(0, 2) = x + 2y|_{x=0,y=2} = 4$$

da cui segue $z - 5 = 3x + 4(y - 2)$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = \big(x-y\big)\big(x^2+y^2-1\big)\,, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

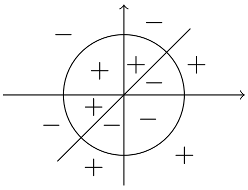
(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f>0\}$, $\{f<0\}$ e $\{f=0\}$.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

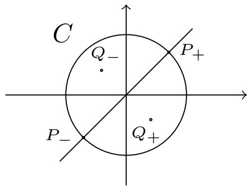
(c) Calcolate il minimo e il massimo globale di f sull'insieme
$$K = \big\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ 0\le y\le x+1 \text{ e } x\le 0\big\}\,.$$

Soluzione. (a) Si ha
$$\begin{aligned}
\{f>0\} &= \big\{(x,y):\ x>y \text{ e } x^2+y^2>1\big\}\cup\big\{(x,y):\ x<y \text{ e } x^2+y^2<1\big\}\,;\\
\{f<0\} &= \big\{(x,y):\ x<y \text{ e } x^2+y^2>1\big\}\cup\big\{(x,y):\ x>y \text{ e } x^2+y^2<1\big\}\,;\\
\{f=0\} &= \big\{(x,y):\ x=y \text{ o } x^2+y^2=1\big\}\,;
\end{aligned}$$

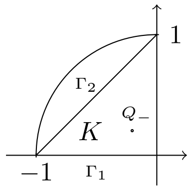
Il segno di f è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)



(3)

(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le sue derivate parziali sono date da
$$f_x(x,y) = 3x^2+y^2-2xy-1 \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -3y^2+2xy-x^2+1$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni dei sistemi equivalenti
$$\begin{cases} 3x^2+y^2-2xy = 1\\ -3y^2+2xy-x^2 = -1\end{cases} \qquad\iff\qquad \begin{cases} 2x^2-2y^2 = 0\\ -3y^2+2xy-x^2 = -1\end{cases}$$
dove il secondo è ottenuto dal primo sostituendo la somma delle due equazioni alla prima equazione. Deve allora essere $x=y$ e $x^2=1/2$ oppure $x=-y$ e $x^2=1/6$. I punti critici di f sono quindi i punti $P_\pm = \pm(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ e $Q_\pm = \pm(1/\sqrt{6}, -1/\sqrt{6})$ (Figura (2)) e dall'esame del segno di f (Figura (1)) si conclude immediatamente che i punti $P_\pm$ sono punti di sella di f mentre i punti Q_+ e Q_- sono rispettivamente punti di minimo e massimo locale di f per il teorema di Weierstrass.

(c) L'insieme K è il triangolo rappresentato in Figura (3). Esso è compatto poiché chiuso (contiene il suo bordo) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Il triangolo K è contenuto nel semicerchio
$$C = \big\{(x,y):\ x^2+y^2\le 1 \text{ e } y\ge x\big\}$$
(Figura (2)) che è anch'esso compatto per lo stesso motivo e dall'esame del segno di f si conclude immediatamente che il minimo globale di f su C è assunto sul bordo ∂C dove f si annulla mentre il massimo globale è necessariamente assunto in Q_-. Poiché risulta $K\subset C$ e i vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ del triangolo K appartengono a C, si conclude che anche il minimo globale di f su K è assunto nei punti $(0,0)$, $(1,0)$ e $(0,1)$ dove f si annulla. Analogamente, da $Q_-\in K$ si deduce che anche il massimo globale di f su K è assunto in Q_- dove risulta
$$f(Q_-) = \frac{4}{3\sqrt{3}}.$$
Alternativamente è possibile studiare l'andamento delle restrizioni di f al bordo di K.

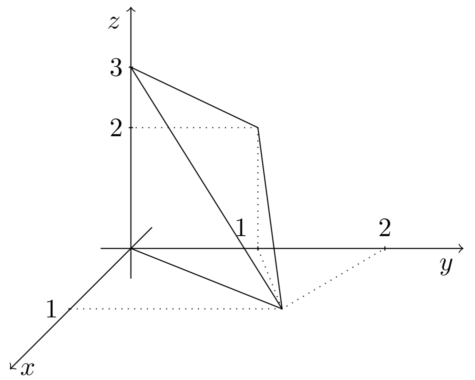
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : \ 2x \le y \le x + 1, \, 0 \le z \le 3 - (x + y) \text{ e } x \ge 0\right\}.$$

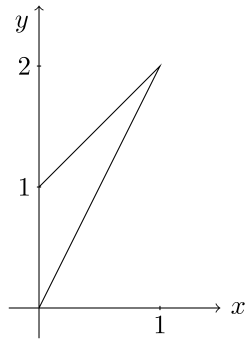
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K (x + y + 2z)\, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai piani di equazione $x = 0$, $y = 2x$, $y = x + 1$, $z = 0$ e $z = 3 - x - y$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x, y, z) = x + y + 2z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo compatto

$$\pi_{xy}(K) = \{(x, y) : \ x, y \ge 0 \text{ e } 2x \le y \le x + 1\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo $K_{(x,y)} = [0, 3 - x - y]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{3-x-y} (x + y + 2z)\, dz \right) dV_2(x, y) = \int_{\pi_{xy}(K)} \big[9 - 3(x + y)\big]\, dV_2(x, y)$$

e per la stessa formula risulta poi con semplici calcoli

$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} \big[9 - 3(x + y)\big]\, dV_2(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_{2x}^{x+1} \big[9 - 3(x + y)\big]\, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ 9(1 - x) - \frac{3}{2}\left[(2x + 1)^2 - 9x^2\right] \right\} dx = \\ &= -\frac{9}{2}(1 - x)^2 - \frac{1}{4}(2x + 1)^3 + \frac{9}{2}x^3 \bigg|_0^1 = 5/2. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{\sqrt{2-[x(t)]^2}}{x(t)} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t\,,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{\sqrt{2-x^2}}{x}, \qquad 0 < |x| < \sqrt{2}.$$

Essendo il dato iniziale $x_0 = 1 > 0$, possiamo considerare h definita nel solo intervallo $(0\,,\sqrt{2})$. La funzione h è infinite volte derivabile in $(0\,,\sqrt{2})$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha\,,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
La soluzione massimale verifica $0 < x(t) < \sqrt{2}$ per ogni $t \in (\alpha\,,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x(t)}{\sqrt{2-[x(t)]^2}}x'(t) = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_1^y \frac{z}{\sqrt{2-z^2}}\,dz = -\sqrt{2-z^2}\Big|_1^y = 1 - \sqrt{2-y^2}, \qquad 0 < y < \sqrt{2},$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha\,,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H \circ x)(t) = 1 - \sqrt{2-[x(t)]^2} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \sqrt{1+2t-t^2}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Restano infine da determinare α e β. Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = \lim_{y \to 0^+} \left(1 - \sqrt{2-y^2}\right) = 1 - \sqrt{2},$$
$$\lim_{y \to \sqrt{2}^-} H(y) = \lim_{y \to +\infty} \left(1 - \sqrt{2-y^2}\right) = 1,$$

si conclude che risulta $\alpha = 1 - \sqrt{2}$ e $\beta = 1$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \sqrt{1+2t-t^2}, \qquad 1 - \sqrt{2} < t < 1.$$