Cognome	______________________	Non scrivere qui	
Nome	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6	
Matricola	|_|_|_|_|_|_|		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2016-2017 — Parma, 7 Febbraio 2017

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $\alpha \geq 0$. Il limite $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|x|^\alpha y}{x^2+y^2}$

(a) vale $+\infty$ per $\alpha = 0$; (b) esiste se e solo se $\alpha > 1$; (c) non esiste per $\alpha = 2$.

Soluzione. Il limite proposto esiste se e solo se risulta $\alpha/2 + 1/2 > 1$ da cui segue $\alpha > 1$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. La funzione $f \in C^2(\mathbb{R}^2)$ ha in $P = (x_0, y_0)$ un punto di massimo relativo. Quale tra le seguenti matrici può essere la matrice hessiana di f in P?

(a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La matrice hessiana $D^2f(P)$ di una funzione di classe C^2 in un punto di massimo locale P è una matrice simmetrica con autovalori (non necessariamente distinti) $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq 0$ e risulta

$$\det\left[D^2f(P)\right] = \lambda_1\lambda_2 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}\left[D^2f(P)\right] = \lambda_1 + \lambda_2.$$

Denotata allora con A la matrice nei tre casi proposti, risulta

(a) A simmetrica con $\det A > 0$ e $\operatorname{tr} A > 0$; $\implies$ A ha autovalori positivi $\lambda_2 \geq \lambda_1 > 0$;
(b) A non simmetrica;
(c) A simmetrica con $\det A = 0$ e $\operatorname{tr} A < 0$. $\implies$ A ha autovalori $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 = 0$.

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Di quale tra le seguenti equazioni differenziali è soluzione la funzione $x(t) = e^{2t} + 2t$?

(a) $x'(t) = 2x(t) - 4t$; (b) $x''(t) - 5x'(t) + 6x(t) = 0$; (c) $x''(t) - 2x'(t) = -4$.

Soluzione. Si ha $x'(t) = 2e^{2t} + 2$ e $x''(t) = 4e^{2t}$ per ogni t. Sostituendo si verifica che la risposta corretta è (c).

Esercizio 4. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) = x + y + z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Descrivete gli insiemi di livello $\{f = c\}$ $(c \in \mathbb{R})$ di f.

(b) Determinate massimo e minimo globali di f sull'insieme $K = \left\{(x,y,z) :\ 2x^2 + y^2 + 3z^2 \leq 1\right\}$.

Soluzione. (a) Gli insiemi di livello $\{f = c\}$ $(c \in \mathbb{R})$ sono i piani paralleli di equazione $x + y + z = c$. Tali piani sono tutti perpendicolari al vettore di componenti $(1,1,1)$.

(b) L'insieme K è chiuso e limitato ed è formato dai punti (x,y,z) racchiusi dall'ellissoide centrato nell'origine di semiassi $a = 1/\sqrt{2}$, $b = 1$ e $c = 1/\sqrt{3}$. La funzione f è lineare e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Pertanto, f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Inoltre, si ha evidentemente

$$\begin{aligned} (x,y,z) \in K \qquad &\Longleftrightarrow \qquad (-x,-y,-z) \in K \\ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \qquad &\Longrightarrow \qquad f(-x,-y,-z) = -f(x,y,z) \end{aligned}$$

e quindi i punti di minimo e di massimo globali sono antipodali e il minimo e il massimo globali opposti tra loro.

Per determinare tali punti osserviamo che il gradiente di f di non si annulla in alcun punto di $\mathbb{R}^3$ e quindi il massimo e il minimo globale di f su K devono essere assunti sul bordo ∂K. Posto

$$\Phi(x,y,z) = 2x^2 + y^2 + 3z^2 - 1, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

risulta $\partial K = \{\Phi(x,y,z) = 0\}$ e $\nabla\Phi(x,y,z) \neq (0,0,0)$ in ogni punto $(x,y,z) \in \partial K$ e quindi ∂K risulta essere una $2-$superficie regolare in $\mathbb{R}^3$. Per il teorema dei moltiplicatori di Lagrange, nei punti di massimo e minimo il gradiente $\nabla f = (1,1,1)$ di f deve essere parallelo al gradiente $\nabla\Phi(x,y,z) = (4x, 2y, 6z)$ di Φ. I punti $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ in cui ∇f e $\nabla\Phi(x,y,z)$ sono paralleli sono i punti (x,y,z) tali che risulti

$$4x = \lambda; \qquad 2y = \lambda; \qquad 6z = \lambda;$$

per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Imponendo che $\lambda \neq 0$ sia tale che i corrispondenti punti appartengano a ∂K si trova che deve essere $\lambda = \pm 2\sqrt{6/11}$ da cui segue con facili calcoli che i punti di minimo e massimo globale di f su K sono

$$P_\pm = \pm\left(\sqrt{\frac{3}{22}}, 2\sqrt{\frac{3}{22}}, \frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{22}}\right)$$

cui corrispondono

$$\min_K f = f(P_-) = -\sqrt{\frac{11}{6}} \qquad \text{e} \qquad \max_K f = f(P_+) = \sqrt{\frac{11}{6}}.$$

Esercizio 5. Sia $\Phi\colon \mathbb{R}^2_+ \to \mathbb{R}^2_+$ il cambio di variabili $(x,y) = \Phi(u,v)$ definito da

$$u = \sqrt{x^2+y} \qquad \text{e} \qquad v = y/x^2.$$

(a) Determinate esplicitamente Φ e calcolate lo jacobiano $J\Phi$.

(b) Disegnate l'insieme

$$K = \left\{(x,y):\ x>0,\ x^2 \le y \le 2x^2 \text{ e } 1-x^2 \le y \le 2-x^2\right\}$$

e calcolatene la misura (area) $|K|$.

Soluzione. (a) Per ogni $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$, invertendo le relazioni $u = \sqrt{x^2+y}$ e $v = y/x^2$, si trova una e una sola soluzione $(x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$ data da

$$x = \frac{u}{\sqrt{1+v}} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{u^2 v}{1+v}.$$

Pertanto, la funzione $\Phi\colon (\mathbb{R}_+)^2 \to (\mathbb{R}_+)^2$ di componenti $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ definite da

$$\Phi^1(u,v) = \frac{u}{\sqrt{1+v}} \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(u,v) = \frac{u^2 v}{1+v}$$

per ogni $(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2$ è biettiva da $(\mathbb{R}_+)^3$ su se stesso. Inoltre, risulta

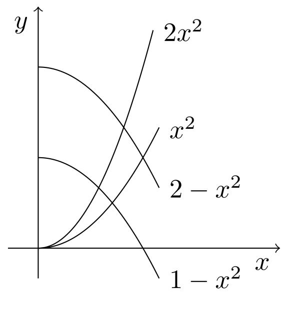
$$D\Phi(u,v,w) = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{1+v}} & -\dfrac{u}{2(1+v)^{3/2}} \\ \dfrac{2uv}{1+v} & \dfrac{u^2}{(1+v)^2} \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2,$$

da cui segue

$$J\Phi(u,v,w) = \frac{u^2}{(1+v)^{3/2}}, \qquad (u,v,w) \in (\mathbb{R}_+)^2.$$

Pertanto Φ è un diffeomorfismo di $(\mathbb{R}_+)^2$ su se stesso come per altro si poteva stabilire anche direttamente osservando che la funzione inversa Φ^{-1} è di classe C^∞ in $(\mathbb{R}_+)^2$.

(b) L'insieme K è rappresentato (non in scala) nella figura seguente .



L'insieme

$$H = \Phi^{-1}(K) = \left\{(u,v) \in (\mathbb{R}_+)^2 :\ 1 \le u \le 2 \text{ e } 1 \le s \le \sqrt{2}\right\} = [1,2] \times [1,\sqrt{2}].$$

è un rettangolo compatto contenuto in $(\mathbb{R}_+)^2$. Quindi, anche K è compatto e misurabile e, per la formula di cambiamento di variabili, l'area di K è data da

$$\begin{aligned} V_2(K) &= \int_K 1\, dV_2(x,y) = \int_H \frac{u^2}{(1+v)^{3/2}}\, dV_2(u,v) = \\ &= \int_1^{\sqrt{2}} u^2\, du \cdot \int_1^2 \frac{1}{(1+v)^{3/2}}\, dv = \frac{2}{3}\left(2\sqrt{2}-1\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right). \end{aligned}$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = e^{x(t)} - \dfrac{1}{e^{x(t)}} \\ x(0) = \log 2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t\,,x) = g(t)h(x)$, $(t\,,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x} = \frac{\mathrm{e}^{2x} - 1}{\mathrm{e}^x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile in $\mathbb{R}$ cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha\,,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = 0$ è ovviamente la funzione costante $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x(0) = \log 2 > 0$ verifica la stessa disuguaglianza: $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha\,,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{\mathrm{e}^{x(t)}}{\mathrm{e}^{2x(t)} - 1} x'(t) = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_{\log 2}^{y} \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{2z} - 1}\, dz = \int_2^{\mathrm{e}^y} \frac{1}{u^2 - 1}\, du = \frac{1}{2} \log \left| \frac{u-1}{u+1} \right| \Bigg|_2^{\mathrm{e}^y} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y + 1}} - \log \frac{1}{\sqrt{3}}$$

per ogni $y > 0$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha\,,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H \circ x)(t) = \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}^{x(t)} - 1}{\mathrm{e}^{x(t)} + 1}} - \log \frac{1}{\sqrt{3}} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \log \left(\frac{3 + \mathrm{e}^{2t}}{3 - \mathrm{e}^{2t}} \right), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Restano infine da determinare α e β. Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = \lim_{y \to 0^+} \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y + 1}} - \log \frac{1}{\sqrt{3}} = -\infty,$$
$$\lim_{y \to +\infty} H(y) = \lim_{y \to +\infty} \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}^y - 1}{\mathrm{e}^y + 1}} - \log \frac{1}{\sqrt{3}} = -\log \frac{1}{\sqrt{3}},$$

si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = \log \sqrt{3}$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \log \left(\frac{3 + \mathrm{e}^{2t}}{3 - \mathrm{e}^{2t}} \right), \qquad -\infty < t < \log \sqrt{3}.$$