Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola

Laurea Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5	6

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2016-2017 — Parma, 18 Gennaio 2017

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = y/(1+x^2)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. L'equazione del piano tangente al grafico di f sopra il punto di coordinate $(2,1)$ è

(a) $x + y - 5z = 2$; (b) $4x - 5y + 25z = 5$; (c) $4x - 5y + 25z = 8$.

Soluzione. L'equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0) è

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Si ha $f(2,1) = 1/5$ e

$$f_x(2,1) = -\frac{2xy}{(1+x^2)^2}\bigg|_{x=2,y=1} = -4/25 \qquad \text{e} \qquad f_y(2,1) = \frac{}{1+x^2}\bigg|_{x=2,y=1} = 1/5$$

da cui segue $z - 1/5 = -4(x-2)/25 + (y-1)/5$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Sia γ la curva piana di componenti

$$x(t) = t^5 + 312t^4 + 61t^3 - 213t^2 + t + 1 \qquad \text{e} \qquad y(t) = t^8 - 317t^4 + 29t^2 - 5t + 2$$

e sia $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione definita da $\varphi(t) = f(x(t), y(t))$ ove $f(x,y) = y\mathrm{e}^{x^3 y}$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Allora,

(a) $\varphi'(0) = -3\mathrm{e}^2$; (b) $\varphi'(0) = -11\mathrm{e}^2$; (c) $\varphi'(0) = 2\mathrm{e}^6 - 5\mathrm{e}$.

Soluzione. Si ha

$$\varphi'(0) = f_x(x(0),y(0))x'(0) + f_y(x(0),y(0))y'(0).$$

Risulta $x(0) = 1$, $y(0) = 2$, $x'(0) = 1$, $y'(0) = -5$ e $f_x(1,2) = 12\mathrm{e}^2$ e $f_y(1,2) = 3\mathrm{e}^2$ da cui segue $\varphi'(0) = -3\mathrm{e}^2$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ e sia $I = \displaystyle\int_T xy\, dV_2(x,y)$. Allora,

(a) $I = 1/4$; (b) $I = 1/2$; (c) $I = 1/8$.

Soluzione. Il triangolo T è l'insieme $T = \big\{(x,y) :\ 0 \le y \le x \le 1\big\}$. Integrando prima rispetto ad y e poi rispetto ad x si ha

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x xy\, dy\right) dx = \int_0^1 x^3/2\, dx = \frac{1}{8}x^4\bigg|_0^1 = \frac{1}{8}.$$

La risposta corretta è quindi (c).

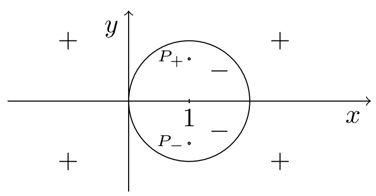
Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = y^2\left(x^2+y^2-2x\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f>0\}$, $\{f<0\}$ e $\{f=0\}$.

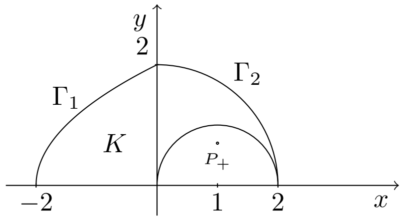
(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sull'insieme
$$K = \left\{(x,y):\ y^2-4 \le 2x \le 0 \text{ e } y \ge 0\right\} \cup \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 4 \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

Soluzione. (a) Si ha $f(x,y) = y^2\left[(x-1)^2+y^2-1\right]$ per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e da ciò segue
$$\{f>0\} = \left\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2>1 \text{ e } y \neq 0\right\};$$
$$\{f<0\} = \left\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2<1 \text{ e } y \neq 0\right\};$$
$$\{f=0\} = \left\{(x,y):\ (x-1)^2+y^2=1 \text{ e } y \neq 0\right\} \cup \left\{(x,y):\ y=0\right\}.$$
Il segno di f è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = 2y^2(x-1) \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 2y\left(x^2+2y^2-2x\right)$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $2y^2(x-1)=0$ e $2y\left(x^2+2y^2-2x\right)=0$. Dalla prima equazione si ricava che i punti critici sono tutti e soli i punti della forma $(x,0)$ al variare di $x\in\mathbb{R}$ e i punti $P_\pm = (1, \pm 1/\sqrt{2})$. Dall'esame del segno di f in Figura (1) si determina immediatamente la natura dei punti critici:

$(x,0)$ con $x<0$ o $x>2$: punti di minimo locale (non globale);
$(x,0)$ con $0<x<2$: punti di massimo locale (non globale);
$(x,0)$ con $x=0$ o $x=2$: punti di sella;
$(1,\pm 1/\sqrt{2})$: punti di minimo globale.

(c) L'insieme K è rappresentato in Figura (2). Esso è compatto poiché chiuso (contiene il suo bordo) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. L'unico punto critico di f nell'interno di K è il punto P_+ che è punto di minimo globale di f su K, essendo anche punto di minimo globale di f su tutto $\mathbb{R}^2$. Poiché nessun altro punto critico di f è interno a K, il massimo globale di f su K deve essere assunto in un punto del bordo e in particolare in un punto di
$$\Gamma_1 = \left\{(x,y):\ y^2-4 = 2x \le 0 \text{ e } y \ge 0\right\} \qquad \text{o} \qquad \Gamma_2 = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 4 \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$
Si ha
$$(x,y)\in\Gamma_1 \implies y^2 = 2x+4 \implies f(x,y)\big|_{y^2=2x+4} = (2x+4)\left(x^2+4\right) \quad x\in[-2,0];$$
$$(x,y)\in\Gamma_2 \implies x^2+y^2 = 4 \implies f(x,y)\big|_{x^2+y^2=4} = \left(4-x^2\right)(4-2x) \quad x\in[0,2];$$
e la funzione $\varphi\colon[-2,2]\to\mathbb{R}$ definita da
$$\varphi(x) = \begin{cases} (2x+4)\left(x^2+4\right) & x\in[-2,0] \\ \left(4-x^2\right)(4-2x) & x\in[0,2] \end{cases}$$
assume massimo globale nel punto $x=0$. Pertanto il punto di massimo globale di f su K è il punto di coordinate $(0,2)$ in cui risulta $f(0,2)=16$.

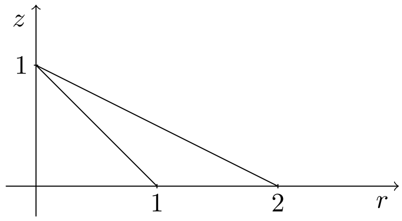
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) : \, 1 - \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1 - \sqrt{x^2+y^2}/2 \text{ e } z \ge 0 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K \frac{1}{z + \sqrt{x^2+y^2}}\, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la retta di equazione $z = 1 - r$ e $z = 1 - r/2$ per $0 \le r \le 2$ come illustrato in figura.



L'insieme K è quindi formato dai punti (x, y, z) posti sopra il piano $z = 0$ e compresi tra i coni retti con vertice in $(0, 0, , 1)$, asse coincidente con l'asse z e angoli al vertice pari a $\pi/4$ e $3\pi/4$.

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un solido di rotazione. Inoltre, risulta

$$(x, y, z) \in K \qquad \Longrightarrow \qquad z + \sqrt{x^2+y^2} \ge 1$$

e quindi la funzione

$$f(x, y, z) = \frac{1}{z + \sqrt{x^2+y^2}}, \qquad (x, y, z) \in K,$$

è continua su K e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0, 1]$ e la corrispondente sezione è la corona circolare

$$K^z = \left\{ (x, y) : \, 1 - z \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2(1-z) \right\}, \qquad z \in [0, 1].$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_0^1 \left(\int_{K^z} \frac{1}{z + \sqrt{x^2+y^2}}\, dV_2(x, y) \right) dz$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano, per ogni $0 \le z < 1$ risulta

$$\begin{aligned}\int_{K^z} \frac{1}{z + \sqrt{x^2+y^2}}\, dV_2(x, y) &= 2\pi \int_{1-z}^{2(1-z)} \frac{r}{z+r}\, dr = 2\pi \int_{1-z}^{2(1-z)} \left(1 - \frac{z}{z+r}\right) dr = \\ &= 2\pi \left(r - z \log(r+z) \right) \Big|_{1-z}^{2(1-z)} = 2\pi \left[1 - z - z \log(2-z) \right].\end{aligned}$$

Da

$$\int \left[1 - z - z \log(2-z) \right] dz = -\frac{1}{2}(1-z)^2 + \frac{1}{4}(z+2)^2 - \frac{1}{2}\left(z^2 - 4\right) \log(2-z) + C, \qquad z < 2,$$

con semplici calcoli si ottiene infine $I = 2\pi \left(7/4 - \log 4 \right)$.

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 5x'(t) - 6x(t) = 7\mathrm{e}^{-t} - 6t - 17 \\ x(0) = 2 \text{ e } x'(0) = 7. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 5\lambda - 6 = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda_1 = -1$ e $\lambda_2 = 6$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{6t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{6t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = At\mathrm{e}^{-t} + Bt + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B, C \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Si ha

$$x_p''(t) - 5x_p'(t) - 6x_p(t) = -7A\mathrm{e}^{-t} - 6Bt - 5B - 6C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $A = -1$, $B = 1$ e $C = 2$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{6t} - t\mathrm{e}^{-t} + t + 2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 2$ e $x'(0) = 7$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + 2 = 2 \\ x'(0) = -C_1 + 6C_2 = 7 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = -1$ e $C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = -(1 + t)\mathrm{e}^{-t} + \mathrm{e}^{6t} + t + 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$