COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6
MATRICOLA	⌊ · · · · · · ⌋	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2015-2016 — PARMA, 25 NOVEMBRE 2016

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile in $(0,0)$ con gradiente $\nabla f(0,0) = (2,3)$. Allora, la derivata direzionale $\partial_v f(0,0)$ di f in $(0,0)$ nella direzione del vettore $v = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$

(a) non si può calcolare; (b) è $\partial_v f(0,0) = 3/2 - \sqrt{3}$; (c) è $\partial_v f(0,0) = (-\sqrt{3}, 3/2)$.

Soluzione. Poiché f è differenziabile in $(0,0)$ per ipotesi, la derivata direzionale di f in $(0,0)$ nella direzione del vettore $v = (-\sqrt{3}/2, 1/2)$ è data da

$$\partial_v f(0,0) = \langle \nabla f(0,0), v \rangle = -\sqrt{3} + 3/2.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. La misura dell'insieme $E = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\, x^2 + y^2 \le z \le \sqrt{x^2 + y^2}\right\}$ è

(a) $\pi/6$; (b) $\pi/3$; (c) $\pi/2$.

Soluzione. L'insieme E è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz compresa tra la parabola di equazione $z = r^2$ e la retta di equazione $z = r$ ($r \ge 0$). Le coordinate $(1,1)$ dell'intersezione tra la parabola e la retta si trovano risolvendo il sistema formato dalle equazioni $z = r^2$ e $z = r$ con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Pertanto E è l'insieme dei punti (x,y,z) che stanno sopra il paraboloide di equazione $z = (x^2 + y^2)$ e sotto il cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. L'insieme E è evidentemente compatto ed è misurabile essendo un solido di rotazione. Calcoliamo la misura di E mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(E)$ di K sul piano xy è il cerchio di centro nell'origine e raggio unitario. Utilizzando coordinate polari nel piano risulta allora

$$|E| = 2\pi \int_0^1 \left(r - r^2\right) r\, dr = 2\pi(1/3 - 1/4) = \pi/6.$$

La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 3. Quale tra le seguenti equazioni differenziali NON ha la funzione $x(t) = 2t + e^t$, $t \in \mathbb{R}$ come soluzione?

(a) $x'' = e^t$; (b) $x' = x - t + 1$; (c) $x''' - x'' = 0$.

Soluzione. Le derivate di $x(t)$ sono $x'(t) = 2 + e^t$ e $x''(t) = x'''(t) = e^t$ per ogni t e quindi l'unica equazione di cui $x(t)$ non è soluazione è la seconda. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = \left(x^2+3x+3\right)\left(y^2-1\right) + (x-1)^2 + xy^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate $\inf\left\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ e $\sup\left\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

(c) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme $Q = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1\}$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,,y) = 2xy^2 + 4y^2 - 5 \qquad \text{e} \qquad f_y(x,,y) = 2y\left(x^2+4x+3\right)$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $2xy^2+4y^2-5=0$ e $2y\left(x^2+4x+3\right)=0$. Dalla prima equazione si ricava che deve essere $y \neq 0$ e quindi dalla seconda segue che deve essere $x=-1$ o $x=-3$. Ad $x=-1$ corrispondono le soluzioni $y=\pm\sqrt{5/2}$ mentre per $x=-3$ non ci sono soluzioni della prima equazione. I punti critici di f sono quindi i punti $P_\pm = (-1, \pm\sqrt{5/2})$. Per determinarne la natura, esaminiamo le derivate parziali seconde di f. Esse sono date da

$$f_{xx}(x,y) = 2y^2; \qquad f_{yy}(x,y) = 2\left(x^2+4x+3\right); \qquad f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = 4y(x+2);$$

per ogni (x,y) e quindi la matrice hessiana di f in $P_\pm = (-1, \pm\sqrt{5/2})$ è

$$D^2 f(-1, \pm\sqrt{5/2}) = \begin{pmatrix} 2 & \mp\sqrt{5/2} \\ \mp\sqrt{5/2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Poiché essa ha determinate negativo, entrambi i punti critici $P_\pm$ sono punti di sella di f.

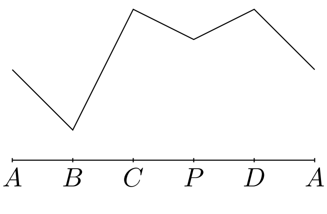
(c) Si ha $f(0,y) = 3y^2 - 2 \to +\infty$ per $y \to \pm\infty$ e $f(x,1/x) = -5x + 3 + 4/x - 3/x^2 \to -\infty$ per $y \to +\infty$. Quindi risulta

$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty.$$

(d) Il quadrato Q è compatto poiché chiuso (contiene il suo bordo) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su Q per il teorema di Weierstrass. Poiché f non ha punti critici nell'interno di Q, i punti di minimo e massimo globale devono trovarsi sul bordo di Q. Basta quindi studiare le funzioni

$$\varphi_1(t) = f(t,0) = -5t - 2, \qquad \varphi_2(t) = f(t,1) = 8t^2 - 7,$$
$$\varphi_3(t) = f(t,1) = t^2 - t + 1, \qquad \varphi_4(t) = f(0,t) = 3t^2 - 2,$$

per $t \in [0,1]$. La funzione φ_1 è decrescente in $[0,1]$ mentre φ_2 e φ_4 sono crescenti nello stesso intervallo. La funzione φ_3 ha invece un minimo per $t = 1/2$. Denotando quindi con $A, \ldots, D$ i vertici del quadrato a partire dall'origine procedendo in verso antiorario e con P il punto di coordinate $(1/2, 1)$ e tenendo conto che risulta $f(A) = -2$, $f(B) = -7$, $F(C) = f(D) = 1$ e $f(P) = 3/4$, l'andamento di f sul bordo di Q è rappresentato nella figura seguente



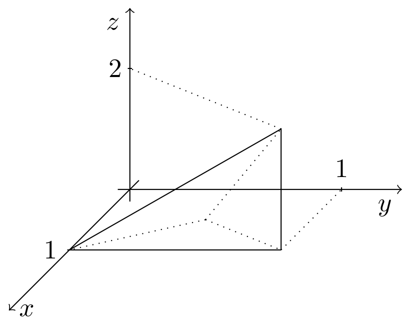
Il massimo globale è assunto nei punti C e D dove risulta $f(0,1) = f(1,1) = 1$ mentre il minimo globale di f è assunto punto B ove risulta $f(1,0) = -7$.

Esercizio 5. Sia
$$K = \left\{(x,y,z): \ 0 \le y \le x \le 1 \text{ e } 0 \le z \le x+y-1\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x \, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ individuato dai piani di equazione $x = 1$, $x = y$, $z = 0$ e $z = x+y-1$. Esso è rappresentato nella figura seguente.



(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione
$$f(x,y,z) = x, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo
$$\pi_{xy}(K) = \{(x,y): \ 0 \le y \le x \le 1 \text{ e } x+y \ge 1\}$$
e la corrispondente sezione è l'intervallo $K_{(x,y)} = [0, x+y-1]$. Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{x+y-1} x \, dz \right) dV_2(x,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} x(x+y-1) \, dV_2(x,y)$$
e per la stessa formula risulta poi con qualche calcolo
$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} x(x+y-1) \, dV_2(x,y) &= \int_{1/2}^1 \left(\int_{1-x}^x \left[x(x-1) + xy\right] \, dy \right) dx = \\ &= \int_{1/2}^1 \left(2x^3 - 2x^2 + x/2\right) \, dx = 7/96. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - 4x' + 8x = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

(b) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione completa.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda = 2 \pm 2i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{2t}\cos(2t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = e^{2t}\operatorname{sen}(2t)$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = Ae^{2t}\cos(2t) + Be^{2t}\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.
(b) Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = Ce^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $C \in \mathbb{R}$ è una costante da determinare. Si ha

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) + 8x_p(t) = 4Ce^{2t} - 8Ce^{2t} + 8Ce^{2t} = 4Ce^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $C = 1/4$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1e^{2t}\cos(2t) + C_2e^{2t}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in\in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(c) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = A + 1/4 \\ x'(0) = 2A + 2B + 1/2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $A = -1/4$ e $B = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{4}\big(1 - \cos(2t)\big)\, e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$