Cognome	______________________	Non scrivere qui
Nome	______________________	1 2 3 4 5 6
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2015-2016 — Parma, 20 Settembre 2016

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Il dominio D della funzione $f(x,y) = \dfrac{\log\left(y - x^2 + 1\right)}{y - 2x}$ è un insieme

(a) aperto e non connesso; (b) aperto e limitato; (c) chiuso e non connesso.

Soluzione. Il dominio D della funzione f è l'insieme dei punti (x,y) del piano tali che $y > x^2 - 1$ e $y \neq 2x$. Gli insiemi $\{(x,y) : y > x^2 - 1\}$ e $\{(x,y) : y \neq 2x\}$ sono aperti perché controimmagine mediante polinomi di (unioni di) intervalli aperti di $\mathbb{R}$ e quindi anche D è aperto e non è chiuso. Inoltre, D non è connnesso poiché è unione di $\{(x,y) : y > x^2 - 1 \text{ e } y < 2x\}$ e $\{(x,y) : y > x^2 - 1 \text{ e } y > 2x\}$ che sono aperti (per lo stesso motivo), non vuoti e disgiunti. Infine, D è chiaramente illimitato poiché contiene tutti i punti della forma $(0,y)$ per $y > 0$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 2. La lunghezza della curva $\gamma\colon [0, 2\sqrt{3}] \to \mathbb{R}^2$ definita da $\gamma(t) = \left(t^3/3\right) e_1 + t^2 e_2$ è

(a) negativa; (b) $7/3$; (c) $56/3$; (d) $56/27$.

Soluzione. La curva γ è di classe C^∞ e la sua derivata è $\gamma'(t) = t^2 e_1 + 2t e_2$, $t \in \mathbb{R}$. La lunghezza L di γ è data allora da

$$L = \int_0^{2\sqrt{3}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\sqrt{3}} \sqrt{t^4 + 4t^2}\, dt = \frac{1}{3}\left(t^2 + 4\right)^{3/2}\Big|_0^{2\sqrt{3}} = 56/3.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $f(x,y) = 2xy^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Determinate

(a) il vettore normale al grafico di f nel punto $(2,1)$;

(b) l'equazione del piano tangente al grafico di f nel punto $(2,1)$.

Soluzione. Il vettore normale e l'equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0) sono dati da

$$n = \left(f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0), -1\right) \qquad \text{e} \qquad z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0) + f_y(x_0,y_0)(y - y_0).$$

Si ha $f(2,1) = 4$ e $f_x(2,1) = 2y^2\big|_{x=2,y=1} = 2$ e $f_y(2,1) = 4xy\big|_{x=2,y=1} = 8$. Risulta quindi

$$n = (2, 8, -1) \qquad \text{e} \qquad 2x + 8y - z = 8.$$

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = \left(y^2 - x - 3\right) e^{x+y^2}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

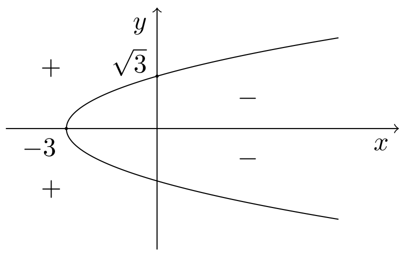
(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ e $\{f = 0\}$.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

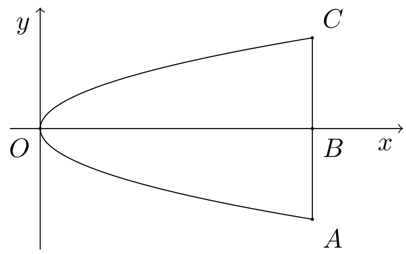
(c) Determinate $\inf\left\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ e $\sup\left\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

(d) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme $K = \left\{(x,y) : y^2 \le x \le 4\right\}$.

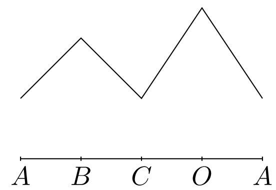
Soluzione. (a) L'insieme $\{f = 0\}$ è il sostegno della parabola (ruotata) di equazione $x = y^2 - 3$. Gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ sono rappresentati in Figura (1).



(1)



(2)



(3)

(b) La funzione f è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,,y) = \left(y^2 - x - 4\right) e^{x+y^2} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,,y) = 2y\left(y^2 - x - 2\right) e^{x+y^2}$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $y^2 - x - 4 = 0$ e $y\left(y^2 - x - 2\right) = 0$ la cui unica soluzione è $x = -4$ e $y = 0$. L'unico punto critico di f è quindi il punto di coordinate $(-4,0)$. Per determinarne la natura, esaminiamo le derivate parziali seconde di f. Esse sono date da
$$f_{xx}(x,y) = \left(y^2 - x - 5\right) e^{x+y^2}; \qquad f_{yy}(x,y) = \left(4y^4 - 4xy^2 + 2y^2 - 2x - 4\right) e^{x+y^2};$$
$$f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) = \left(y^2 - x - 5\right) e^{x+y^2};$$
per ogni (x,y) e quindi la matrice hessiana di f in $(-4,0)$ è
$$D^2 f(-4,0) = \begin{pmatrix} -1/e^4 & 0 \\ 0 & 4/e^4 \end{pmatrix}.$$
Poiché essa ha determinate negativo, il punto $(-4,0)$ è punto di sella di f.

(c) Si ha $f(x,0) = -(x+4)e^x \to -\infty$ per $x \to +\infty$ e $f(0,y) = (y^2 - 4)e^{y^2} \to +\infty$ per $y \to +\infty$. Quindi risulta
$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty.$$

(d) L'insieme K è la parte del piano racchiusa tra l'arco di parabola (ruotata) di equazione $x = y^2$ per $|y| \le 2$ ed il segmento di estremi $A = (4,-2)$ e $C = (4,2)$ (Figura (2)). L'insieme K è compatto poiché chiuso (controimmagine di intervalli chiusi mediante polinomi) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Poiché f non ha punti critici nell'interno di K, i punti di minimo e massimo globale devono trovarsi sul bordo di K e, essendo f pari in y, è sufficiente studiare la restrizione di f alla parte di bordo contenuta nel semipiano speriore. Basta quindi studiare le funzioni
$$\varphi_1(y) = f(4,y) = \left(y^2 - 7\right) e^{y^2+4}, \qquad y \in [0,2], \qquad \text{e} \qquad \varphi_2(y) = f(y^2,y) = -3e^{2y^2}, \qquad y \in [0,2].$$
L'andamento di f sul bordo di K è rappresentato in Figura (3). Il minimo globale è assunto nei punti A e C dove risulta $f(4 \pm 2) = -3e^8$ mentre il massimo globale di f è assunto nell'origine poiché risulta $f(0,0) = -3 > -7e^4 = f(4,0)$.

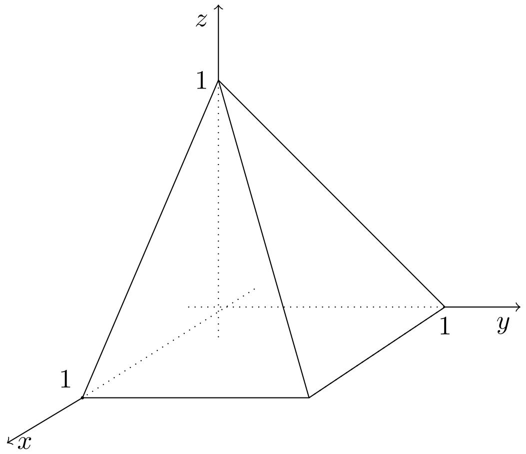
Esercizio 5. Sia

$$K = \{(x,y,z) : 0 \le x \le 1-z,\, 0 \le y \le 1-z \text{ e } z \ge 0\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xyz\, d\mu(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è la piramide (non retta) con base il quadrato $[0,1] \times [0,1]$ nel piano xy e vertice nel punto di coordinate $(0,0,1)$. Esso è rappresentato nella figura seguente.



(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0,1]$ e le corrispondenti sezioni sono i quadrati

$$K^z = \{(x,y) : 0 \le x \le 1-z,\, 0 \le y \le 1-z\}, \qquad z \in [0,1].$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_0^1 \left(\int_{K^z} xyz\, d\mu(x,y) \right) dz$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\int_{K^z} xy\, d\mu(x,y) = \left(\int_0^{1-z} t\, dt \right)^2 = \left(\frac{t^2}{2} \Big|_0^{1-z} \right)^2 = \frac{1}{4}(1-z)^4, \qquad z \in [0,1].$$

Si ha quindi integrando per parti

$$I = \int_0^1 z(1-z)^4\, dz = -\frac{1}{5} z(1-z)^5 \Big|_0^1 + \frac{1}{5} \int_0^1 (1-z)^5\, dz = -\frac{1}{30}(1-z)^6 \Big|_0^1 = \frac{1}{30}$$

da cui segue infine

$$I = \frac{1}{4} \int_0^1 z(1-z)^4\, dz = \frac{1}{120}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = -tx + (t+1)e^t \\ x(0) = 3. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione $x' + tx = (t+1)e^t$.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Posto

$$A(t) = \int -t\, dt = -t^2/2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

tutte le sue soluzioni sono date da

$$x(t) = e^{-t^2/2} \int (t+1)\, e^{t+t^2/2}\, dt.$$

Si ha

$$\int (t+1)\, e^{t+t^2/2}\, dt = \int e^s\, ds \Big|_{s=t^2/2+t} = e^{t^2/2+t} + C$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quindi, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = Ce^{-t^2/2} + e^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con C costante arbitraria.

(b) Imponendo che risulti $x(0) = 3$ si trova $C + 1 = 3$ ovvero $C = 2$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = 2e^{-t^2/2} + e^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$