COGNOME	____________________				NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________				1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	⌊⊥⊥⊥⊥⊥⌋				
LAUREA	CIV AMB	GEST	INF ELN TLC	MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2015-2016 — PARMA, 6 SETTEMBRE 2016

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Considerate la curva parametrica $\phi(t) = (t^2, t - t^3)$, $t \in \mathbb{R}$. Scrivete

(a) l'equazioni parametriche della retta r tangente a ϕ nel punto $\phi(1)$;

(b) l'equazione cartesiana della retta r tangente a ϕ nel punto $\phi(1)$.

Soluzione. Si ha $\phi(1) = (1, 0)$ e

$$\phi'(1) = (2t, 1 - 3t^2)\big|_{t=1} = (2, -2).$$

Quindi, l'equazioni parametriche della retta r tangente a ϕ nel punto $\phi(1)$ sono $x(t) = 1 + 2t$ e $y(t) = -2t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. Eliminando t si trova l'equazione cartesiana di r che è $x + y = 1$.

Esercizio 2. Sia $f\colon [-1, 1] \times (-1, 1) \to \mathbb{R}$ una funzione continua. Allora

(a) f ha massimo globale; (b) f può avere massimo globale; (c) f non ha massimo globale.

Soluzione. Dato che il dominio $D = [-1, 1] \times (-1, 1)$ di f non è compatto non possiamo applicare il Teorema di Weierstrass e la funzione f può avere massimo globale oppure non averlo. Ad esempio la funzione $f(x, y) = y$, $(x, y) \in D$, non ha massimo globale (ha estremo superiore uguale a 1) mentre la funzione $f(x, y) = -y^2$, $(x, y) \in D$, ha massimo che vale zero. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. Di quale delle seguenti equazioni differenziali la funzione $x(t) = t^2$ è soluzione?

(a) $tx' + x = 3t^2$; (b) $x'' - 2x' + x = t^2 - 4t$; (c) $tx' - x^2 = 0$.

Soluzione. Sostituendo $x(t) = t^2$ e le sue derivate $x'(t) = 2t$ e $x''(t) = 2$ nelle equazioni si trova

(a) $2t^2 + t^2 = 3t^2$; (b) $2 - 4t + t^2 = t^2 - 4t$; (c) $2t^2 - t^4 = 0$.

Di esse solo la prima è un'identità per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi la riposta corretta è (a).

Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right)\left(x^2 + y^2 - 2\right), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

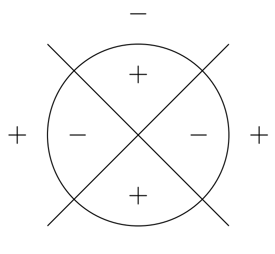
(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ e $\{f = 0\}$.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

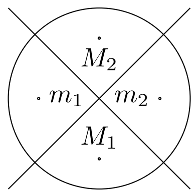
(c) Determinate $\inf\left\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$ e $\sup\left\{f(x,y) : (x,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme $Q = [-2,2] \times [-2,2]$.

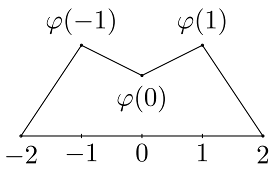
Soluzione. (a) L'insieme $\{f = 0\}$ è formato dalle bisettrici $x = \pm y$ e dalla circonferenza $x^2 + y^2 = 2$ avente centro nell'origine e raggio $r = \sqrt{2}$. Gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ sono evidenziati in Figura (1).



(1)



(2)



(3)

(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono le funzioni $f_x(x,,y) = 4x\left(x^2 - 1\right)$ e $f_y(x,,y) = -4y\left(y^2 - 1\right)$ per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema simmetrico
$$4x\left(x^2 - 1\right) = 0 \qquad \text{e} \qquad -4y\left(y^2 - 1\right) = 0.$$
cioè i nove punti di coordinate (x,y) con $x \in \{0, \pm 1\}$ e $y \in \{0, \pm 1\}$ (Figura (2)).
Per (a), l'origine $O = (0,0)$ e gli altri quattro punti $S_i = (\pm 1, \pm 1)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ che si trovano sulle bisettrici sono punti di sella di f mentre i restanti punti $m_\pm = (\pm 1, 0)$ e $M_\pm = (0, \pm 1)$ sono punti di minimo e massimo rispettivamente poiché i quattro spicchi in cui il cerchio viene diviso dalle bisettrici sono insiemi compatti sul cui bordo f si annulla. Alle stesse conclusioni si perviene anche calcolando le derivate parziali seconde di f ed esaminando la matrice hessiana
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 4 & 0 \\ 0 & 4 - 12y^2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(c) Si ha $f(x,0) = x^4 - 2x^2 \to +\infty$ per $|x| \to +\infty$ e $f(0,y) = 2y^2 - y^4 \to -\infty$ per $|y| \to +\infty$. Quindi risulta
$$\inf_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = -\infty \quad \text{e} \qquad \sup_{(x,y)\in\mathbb{R}^2} f(x,y) = +\infty$$
e in particolare gli estremi di f trovati in (b) sono estremi locali e non globali.
(d) L'insieme Q è il quadrato compatto di lato 4 e centro nell'origine. Poiché f è pari rispetto ad entrambe le variabili e risulta $f(x,y) = -f(y,x)$ per ogni (x,y), è sufficiente determinare il massimo ed il minimo globale di f sul triangolo compatto T con vertici in $V_0 = (0,0)$ e $V_\pm = (2, \pm 2)$. Poiché f si annulla sulle bisettrici, basta studiare la restrizione di f al segmento di estremi V_- e V_+ cioè la funzione
$$\varphi(y) = f(2,y) = \left(4 - y^2\right)\left(y^2 + 2\right), \qquad y \in [-2,2].$$
L'andamento di φ sull'intervallo $[-2,2]$ è rappresentato in Figura (3). Essa assume valore minimo agli estremi $\varphi(\pm 2) = 0$ e massimo in $y = \pm 1$ con $\varphi(\pm 1) = 9$. Poiché risulta $f(0, \pm 1) = 1$ e $f(\pm 1, 0) = -1$, si conclude che il minimo globale di f su Q è assunto nei quattro punti di coordinate $(\pm 1, \pm 2)$ e il massimo globale nei quattro punti $(\pm 2, \pm 1)$ rispettivamente.

Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x,y,z) : \ x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

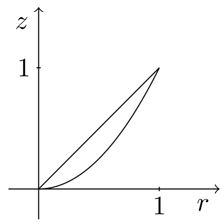
(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xyz\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è formato dai punti di coordinate $x,y \ge 0$ tali che

$$x^2+y^2 \le z \le \sqrt{x^2+y^2}$$

e quindi è la porzione di spazio ottenuta dall'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la parabola $z = r^2$ e il segmento $z = r$ come illustrato in figura.



L'insieme K è quindi formato dai punti (x,y,z) con coordinate $x,y \ge 0$ che stanno sopra il paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$ e fuori dal cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$.
(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione con un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y) : \ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } x,y \ge 0\right\}$$

e le corrispondenti sezioni sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = [x^2+y^2, \sqrt{x^2+y^2}], \qquad (x,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{x^2+y^2}^{\sqrt{x^2+y^2}} xyz\, dV_2(x,y) \right) dz = \int_{\pi_{xy}(K)} \frac{1}{2} xy \left[\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^2 \right] dV_2(x,y).$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\int_{\pi_{xy}(K)} \frac{1}{2} xy \left[\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^2 \right] dV_2(x,y) = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^1 \frac{1}{2} r^3 \left(r^2 - r^4\right) dr$$

da cui segue infine

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \cdot \int_0^1 \left(r^5 - r^7\right) dr = \frac{1}{4} \operatorname{sen}^2\theta \Big|_0^{\pi/2} \cdot \left(\frac{r^6}{6} - \frac{r^8}{8} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{96}.$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = x^2 - x \\ x(0) = 1/2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t\,, x) = g(t)h(x)$, $(t\,, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ con $g(t) = 1$ per $t \in \mathbb{R}$ e $h(x) = x^2 - x$ per $x \in \mathbb{R}$.
La funzione h è infinite volte derivabile in $\mathbb{R}$ essendo un polinomio cosicché il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha\,,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \leq +\infty$ la quale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché le soluzioni massimali relative ai dati iniziali $x_0 = 0$ e $x_0 = 1$ sono ovviamente le funzioni costanti $x(t) = 0$ e $x(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ rispettivamente, la soluzione massimale relativa al dato iniziale $x_0 = -1/2$ verifica le stesse disuguaglianze: $0 < x(t) < 1$ per ogni $t \in (\alpha\,,\beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{[x(t)]^2 - x(t)} = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ponendo

$$H(y) = \int_{1/2}^{y} \frac{1}{z^2 - z}\, dz = \int_{1/2}^{y} \left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz = \log \left| \frac{z-1}{z} \right| \Bigg|_{1/2}^{y} = \log \frac{1-y}{y}, \quad 0 < y < 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha\,,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve allora essere

$$(H \circ x)(t) = \log \frac{1 - x(t)}{x(t)} = t, \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con facili calcoli

$$x(t) = \frac{1}{1 + e^t}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = \lim_{y \to 0^+} \log \frac{1-y}{y} = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to 1^-} H(y) = \lim_{y \to 1^-} \log \frac{1-y}{y} = -\infty,$$

si conclude che risulta $\alpha = \infty$ e $\beta = +\infty$.
La soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è quindi

$$x(t) = \frac{1}{1 + e^t}, \qquad -\infty < t < +\infty.$$