COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA ⌊_|_|_|_|_|_|_⌋

LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5	6

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2015-2016 — PARMA, 20 LUGLIO 2016

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, y^2 < x < \sqrt{y^2+6}\right\}$. Allora,

(a) E non è connesso. (b) $(\sqrt{7},1) \in E$. (c) $(3,-\sqrt{3}) \in \partial E$.

Soluzione. L'insieme E è connesso essendo semplice rispetto all'asse y e, per $x = \sqrt{7}$ e $y = 1$, risulta $x = 1 < 7 = y^2$. La risposta corretta deve quindi essere (c) e infatti il bordo di E è l'insieme

$$\partial E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = y^2 \text{ per } 0 \le y \le \sqrt{3}\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \, x = \sqrt{y^2+6} \text{ per } 0 \le y \le \sqrt{3}\right\}.$$

Esercizio 2. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = \dfrac{xe^y}{x+y^2}$ nel punto di coordinate $(-2,1)$ è

(a) $z = ey - e$. (b) $z = ex + 6ey - 2e$. (c) $z = ey + e$.

Soluzione. L'equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0,y_0) è

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Si ha $f(-2,1) = 2e$ e

$$f_x(-2,1) = \left.\frac{y^2e^y}{(x+y^2)^2}\right|_{x=-2 \text{ e } y=1} = e; \qquad f_y(-2,1) = -\left.\frac{(x-y)^2e^y}{(x+y^2)^2}\right|_{x=-2 \text{ e } y=1} = 6e;$$

da cui segue $z = 2e + e(x+2) + 6e(y-1)$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. La funzione $x(t) = 2te^{-t}$ risolve solo due delle seguenti equazioni differenziali e non risolve la terza: quale? Indicate l'equazione che non è risolta da $x(t)$.

(a) $x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0$. (b) $x'''(t) + 2x''(t) + x'(t) = 0$. (c) $x'(t) - x(t) = 2e^{-t}$.

Soluzione. Calcolando le derivate $x'(t)$ e $x''(t)$ di $x(t)$ risulta

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 0, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché $x(t)$ è soluzione dell'equazione (a) e quindi anche di (b). La risposta corretta (quella che individua l'equazione che non è risolta da $x(t)$) deve quindi essere (c) e infatti risulta

$$x'(t) - x(t) = -4te^{-t} + 2e^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. Sia
$$\Gamma = \left\{(x, y, z) : (x-1)^2 + y^2 = 4 \text{ e } z = x^2 + y^2\right\}.$$

(a) Descrivete Γ e provate che è una $1-$superficie (curva) regolare in $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinate i punti di Γ a distanza minima e massima dall'origine $O = (0, 0, 0)$.

(c) Provate che Γ giace su un piano e trovatene una parametrizzazione.

Soluzione. (a) L'insieme Γ è l'insieme di $\mathbb{R}^3$ che si ottiene intersecando la superficie del cilindro retto di raggio $r = 2$ avente asse parallelo all'asse z passante per il punto del piano $z = 0$ di coordinate $(1, 0)$ con il paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2$ avente vertice nell'origine e per asse la semiretta dei punti dell'asse z con $z \geq 0$.
Per provare che Γ è una $1-$superficie regolare, consideriamo la funzione $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ di componenti

$$\Phi^1(x, y, z) = (x-1)^2 + y^2 - 4 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Risulta allora $\Gamma = \Phi^{-1}\big((0, 0)\big)$ e

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2(x-1) & 2y & 0 \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

da cui segue $\operatorname{rk} D\Phi(x, y, z) \leq 1$ se e solo se risulta $x = 1$ e $y = 0$. Poiché nessun punto di coordinate $(1, 0, z)$ $(z \in \mathbb{R})$ appartiene a Γ, risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x, y, z) = 2$ per ogni $(x, y, z) \in \Gamma$ e questo prova che Γ è una $1-$superficie (curva) regolare in $\mathbb{R}^3$. Inoltre, Γ è chiuso per costruzione ed è anche limitato poiché risulta

$$\begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 4 \\ x \in [-1, 3] \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 = 2x + 3 \in [1, 9] \\ z = x^2 + y^2 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + y^2 \in [1, 9] \\ z \in [1, 9] \end{cases}$$

e da ciò segue $x^2 + y^2 + z^2 \leq 90$.
(b) I punti di Γ a distanza minima e massima dall'origine $O = (0, 0, 0)$ sono i punti di minimo e massimo globale su Γ (se esistono) della funzione

$$d_O(x, y, z) = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

Per studiarne l'esistenza, eliminiamo la radice quadrata considerando la funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ definita da

$$f(x, , z) = \left[d_O(x, y, z)\right]^2 = x^2 + y^2 + z^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^3.$$

Poichè risulta $f(x, y, z) \to +\infty$ per $(x, y, z) \to \infty$, la funzione f assume minimo globale e massimo globale sull'insieme chiuso Γ per il teorema di Weierstrass generalizzato e i punti di minimo e massimo globale di f su Γ sono i punti a distanza minima e massima di Γ dall'origine. Tali punti vanno ricercati tra i punti $(x, y, z) \in \Gamma$ tali che risulti

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2(x-1) & 2y & 0 \\ 2x & 2y & -1 \end{pmatrix} = -4y(z+1) = 0.$$

Deve allora essere $(x, y, z) \in \Gamma$ con $y = 0$ o $z = -1$. Poiché non ci sono punti (x, y, z) di Γ con $z < 0$, deve essere $y = 0$. I punti $(x, 0, z) \in \Gamma$ sono $P_1 = (-1, 0, 1)$ e $P_2 = (3, 0, 9)$ e da $f(-1, 0, 1) = 2$ e $f(3, 0, 9) = 90$ segue che P_1 è il punto di Γ a distanza minima dall'origine mentre P_2 è il punto di Γ a distanza massima dall'origine. Tali distanze sono $\sqrt{2}$ e $\sqrt{90}$ rispettivamente.
(c) Eliminando $x^2 + y^2$ dalle due equazioni che definiscono Γ si ricava che essa giace sul piano di equazione $2x - z = -3$ ed una sua parametrizzazione $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ è data da

$$\gamma(t) = (1 + 2\cos t)e_1 + (2\operatorname{sen} t)e_2 + (5 + 4\cos t)e_3, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

con e_1, e_2, e_3 base canonica di $\mathbb{R}^3$.

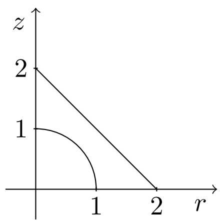
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \geq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K z^2\, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra l'arco di circonferenza di equazione $r^2+z^2 = 1$ ($r \geq 0$ e $z \geq 0$) e il segmento di equazione $r = 2-z$ con $0 \leq r \leq 2$ come illustrato in figura.



In particolare, il segmento $z = 2-r$ per $0 \leq r \leq 2$ non interseca l'arco di circonferenza $r^2+z^2 = 1$ poiché risulta $2-r \geq 1 \geq \sqrt{1-r^2}$ per $0 \leq r \leq 1$.
L'insieme K è quindi formato dai punti (x,y,z) che stanno al di fuori della palla di raggio unitario con centro nell'origine, al di sopra del piano $z = 0$ e sotto la superficie del cono retto con vertice nel punto di coordinate $(0,y,2)$, angolo al vertice pari a $\pi/4$ e asse coincidente con l'asse z.

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un solido di rotazione. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = z^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
A meno di insiemi di misura nulla, risulta $K = K_1 \setminus K_2$ dove

$$K_1 = \left\{(x,y,z) : 0 \leq z \leq 2-\sqrt{x^2+y^2}\right\}; \qquad \text{e} \qquad K_2 = \left\{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1 \text{ e } z \geq 0\right\}.$$

Anche gli insiemi K_1 e K_2 sono solidi di rotazione e sono misurabili e compatti per gli stessi motivi per cui K è tale. Quindi f è integrabile su K_1 e K_2 e possiamo calcolare l'integrale come differenza

$$I = \int_K z^2\, dV_3(x,y,z) = \int_{K_1} z^2\, dV_3(x,y,z) - \int_{K_2} z^2\, dV_3(x,y,z) = I_1 - I_2.$$

Calcoliamo l'integrale di f su ciascun insieme K_i mediante la formula di riduzione per strati. Le proiezioni degli insiemi K_i sull'asse z sono gli intervalli $\pi_z(K_1) = [0,2]$ e $\pi_z(K_2) = [0,1]$ rispettivamente e le corrispondenti sezioni sono i cerchi nel piano xy definiti da

$$\begin{aligned}
(K_1)^z &= \left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq 2-z\right\}, && z \in [0,2],\\
(K_2)^z &= \left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \leq \sqrt{1-z^2}\right\}, && z \in [0,1],
\end{aligned}$$

rispettivamente. Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^2 \left(\int_{(K_1)^z} z^2\, dV_2(x,y)\right) dz = \int_0^2 \pi z^2 (2-z)^2\, dz = \pi\left(\frac{4}{3}z^3 - z^4 + \frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^2 = \frac{16}{15}\pi;\\
I_2 &= \int_0^1 \left(\int_{(K_1)^z} z^2\, dV_2(x,y)\right) dz = \int_0^1 \pi z^2 \left(1-z^2\right) dz = \pi\left(\frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{5}z^5\right)\Big|_0^1 = \frac{2}{15}\pi;
\end{aligned}$$

e quindi risulta

$$I = I_1 - I_2 = \frac{16}{15}\pi - \frac{2}{15}\pi = \frac{14}{15}\pi.$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{x(t)}{t\log t} + 2t\log t \\ x(e) = e^2. \end{cases}$$

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine della forma $x'(t) = a(t)x(t) + b(t)$ con coefficienti $a(t)$ e $b(t)$ definiti per $t > 0$ e $t \neq 1$. Per la scelta della condizione iniziale deve quindi essere $t \in (1, +\infty)$ cosicché, posto

$$A(t) = \int \frac{1}{t\log t}\,dt = \log(\log t), \qquad t > 1,$$

tutte le soluzioni dell'equazione differenziale proposta sono date da

$$x(t) = e^{\log(\log t)} \int 2t\,(\log t)\,e^{-\log(\log t)}\,dt = \log t \int 2t\,dt = \left(t^2 + C\right)\log t, \qquad t > 1,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.
Imponendo che risulti $x(e) = e^2$ si trova $e^2 + C = e^2$ ovvero $C = 0$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = t^2 \log t, \qquad t > 1.$$