COGNOME	______________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________	1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2015-2016 — PARMA, 28 GIUGNO 2016

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Considerate la curva parametrica $\phi(t) = (\operatorname{sen}(2t), 2\cos t, t^2 - t + 2)$, $t \in \mathbb{R}$. Scrivete

(a) l'equazione parametrica della retta r tangente a ϕ nel punto $\phi(0)$;

(b) l'equazione del piano passante per $\phi(0)$ ortogonale alla retta tangente r.

Soluzione. Si ha $\phi(0) = (0, 2, 2)$ e

$$\phi'(0) = (2\cos(2t), 2\cos t, t^2 - t + 2)\big|_{t=0} = (2, 0, -1).$$

Quindi, l'equazioni parametriche della retta r tangente a ϕ nel punto $\phi(0)$ sono $x(t) = 2t$, $y(t) = 2$ e $z(t) = 2 - t$ per ogni $t \in \mathbb{R}$. L'equazione del piano passante per $\phi(0)$ ortogonale alla retta tangente r è $2x - (z - 2) = 0$ cioè $2x - z = -2$.

Esercizio 2. La funzione $f(x, y) = 3xy - 2x + y^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ha un punto critico che è:

(a) punto di minimo locale.   (b) punto di sella.   e   (c) punto di massimo locale.

Soluzione. La funzione f è un polinomio di secondo grado le cui derivate parziali prime e la cui matrice hessiana sono

$$\begin{cases} f_x(x, y) = 3y - 2 \\ f_y(x, y) = 3x + 2y \end{cases} \qquad D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. L'unico punto critico di f è quindi il punto di coordinate $(-4/9, 2/3)$ che è punto di sella poiché la matrice hessiana di f ha determinante negativo. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. Quale delle seguenti funzioni

(a) $x(t) = t/4$;   (b) $x(t) = \operatorname{sen}(2t) + t$;   (c) $x(t) = \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) - 1$;   (d) $x(t) = t - 2\operatorname{sen} t$;

è soluzione dell'equazione differenziale $x''(t) + 4x(t) = t$?

Soluzione. La funzione $x(t) = t/4$, $t \in \mathbb{R}$, è soluzione dell'equazione differenziale proposta. Infatti, si ha

$$x''(t) + 4x(t) = 0 + 4t/4 = t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Le altre funzioni assegnate da da (b), (c) o (d)sen $(2t)$ non sono soluzioni poiché risulta $x''(t) + 4x(t) = 4t$, $x''(t) + 4x(t) = -4$ o $x''(t) + 4x(t) = -6\operatorname{sen} t + 4t$. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y) = 2x^2y - xy^2 + 2xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Studiate il segno di f.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(c) Stabilite se esistono il massimo ed il minimo globale di f su $\mathbb{R}^2$.

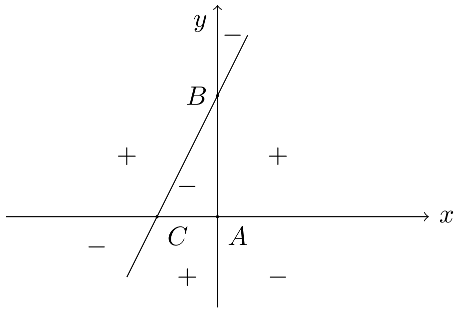
(d) Determinate il minimo ed il massimo globale di f sull'insieme

$$T = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le x + 2 \text{ e } x \le 0\right\}.$$

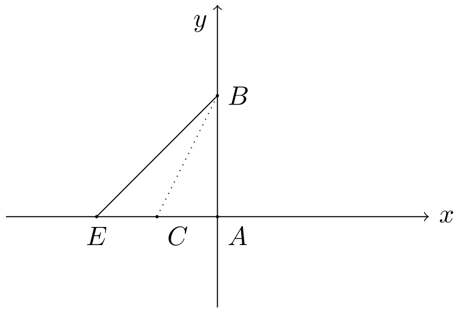
Soluzione. (a) Si ha

$$f(x,y) = xy(2x - y + 2), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

ed il segno di f è illustrato in Figura 1



(1)



(2)

(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono le funzioni $f_x(x,y) = 4xy - y^2 + 2y$ e $f_y(x,y) = 2x^2 - 2xy + 2x$ per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} y(4x - y + 2) = 0 \\ 2x(x - y + 1) = 0 \end{cases}$$

cioè i punti $A = (0,0)$, $B = (0,2)$, $C = (-1,0)$ e $D = (-1/3, 2/3)$. Dall'esame del segno di f si ricava che A, B e C sono punti di sella di f mentre D è punto di minimo locale di f poiché si trova all'interno del triangolo di vertici ABC sul cui bordo f si annulla.

(c) Si ha $f(x,x) = x^3 + 2x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ cosicché risulta $f(x,x) \to \pm\infty$ per $x \to \pm\infty$ e questo mostra che f non ha né massimo né minimo globale su $\mathbb{R}^2$.

(d) L'insieme T è il triangolo di vertici $A = (0,0)$, $B = (0,2)$ e $E = (-2,0)$ (Figura 2). Esso è chiuso e limitato e la funzione f è continua e quindi per il teorema di Weierstrass esistono il massimo ed il minimo globale di f su T. Poiché f è non negativa nel triangolo di vertici CBE, il punto D è il punto di minimo globale di f in T ed il massimo globale di f in T deve essere assunto in un punto del traingolo CBE ed in particolare sul bordo di esso poiché f non ha punti critici interni al triangolo CBE. Inoltre, poiché f è nulla sui segmenti EC e CB, basta considerare la restrizione di f al segmento EB che è

$$\varphi(x) = f(x, x+2) = x^2(x+2), \qquad -2 \le x \le 0.$$

Esaminando il segno della derivata $\varphi'(x) = 3x^2 + 4x$ si ricava che il massimo globale di φ nell'intervallo $[-2,0]$ è assunto nel punto $x = -4/3$ e quindi il punto di coordinate $(-4/3, 2/3)$ risulta essere il punto di massimo globale di f in T. Si ha infine

$$\min_T f = f(-1/3, 2/3) = -4/27 \qquad \text{e} \qquad \max_T f = f(-4/3, 2/3) = 32/27.$$

Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) :\ -2 + x^2 + y^2 \le z \le 1 - 2\left(x^2 + y^2\right) \text{ e } 0 \le x \le y\right\}.$$

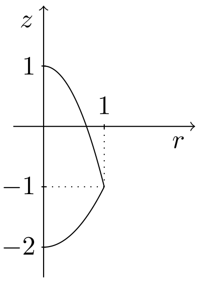
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K 2(x + y)z\, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è formato dai punti di coordinate $0 \le x \le y$ tali che

$$-2 + x^2 + y^2 \le z \le 1 - 2\left(x^2 + y^2\right)$$

e quindi è la porzione di spazio ottenuta dall'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $x \le y$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra le parabole di equazione $z = r^2 - 2$ e $z = 1 - 2r^2$ $(r \ge 0)$ come illustrato in figura.



Le coordinate $(1, -1)$ dell'intersezione tra le parabole si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} z = -2 + r^2 \\ z = 1 - 2r^2. \end{cases}$$

L'insieme K è quindi formato dai punti (x, y, z) con coordinate $0 \le x \le y$ che stanno sopra il paraboloide di equazione $z = (x^2 + y^2) - 2$ e sotto il paraboloide di equazione $z = 1 - 2(x^2 + y^2)$.

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione con un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x, y, z) = 2(x + y)z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su K.

Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) :\ \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \text{ e } 0 \le x \le y\right\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo $[(x^2 + y^2) - 2, 1 - 2(x^2 - y^2)]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K 2(x + y)z\, dV_3(x, y, z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)-2}^{1-2(x^2-y^2)} 2(x + y)z\, dz \right) dV_2(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} 3(x + y) \left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 1 \right] dV_2(x, y). \end{aligned}$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\int_{\pi_{xy}(K)} 3(x + y) \left[\left(x^2 + y^2\right)^2 - 1 \right] dV_2(x, y) = \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 3\left(r^4 - 1\right) r^2\, dr$$

da cui segue infine

$$I = 3 \int_{\pi/4}^{\pi/2} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \cdot \int_0^1 \left(r^6 - r^2\right) dr = 3\left(\operatorname{sen}\theta - \cos\theta\right) \Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \cdot \left(\frac{r^7}{7} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = -\frac{4}{7}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = \operatorname{sen}(2t) + \cos(3t) \\ x(0) = 0,\ x'(0) = -1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 9 = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda = \pm 3i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \cos(3t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \operatorname{sen}(3t)$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \cos(3t) + C_2 \operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poniamo quindi $y_1(t) = \operatorname{sen}(2t)$ e $y_2(t) = \cos(3t)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$ della forma

$$x_p(t) = x_{1,p} + x_{2,p}(t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $x_{i,p}$ è una soluzione dell'equazione $x''(t) + 9x(t) = y_i(t)$ per ogni t. Cerchiamo $x_{i,p}$ della forma

$$x_{1,p}(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t) \qquad \text{e} \qquad x_{2,p}(t) = Ct\cos(3t) + Dt\operatorname{sen}(3t)$$

con $A, \ldots, D$ costanti da determinare. Per $x_{1,p}$ si ha

$$x''_{1,p}(t) + 9x'_{1,p}(t) = 5A\cos(2t) + 5B\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi deve essere $A = 0$ e $B = 1/5$. Per $x_{2,p}$ si ha

$$x''_{2,p}(t) + 9x'_{2,p}(t) = 6D\cos(3t) - 6C\operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi deve essere $C = 0$ e $D = 1/6$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\cos(3t) + C_2\operatorname{sen}(3t) + \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{6}t\operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 0$ e $x'(0) = -1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 \\ x'(0) = 3C_2 + \dfrac{2}{5} = -1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 0$ e $C_2 = -7/15$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{5}\operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{6}t\operatorname{sen}(3t) - \frac{7}{15}\operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$