Cognome	____________	Non scrivere qui	
Nome	____________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6	
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2015-2016 — Parma, 16 Febbraio 2016

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. La funzione $f(x, y) = 3x^2 - 2y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, ammette nell'insieme $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$ minimo globale m e massimo globale M. Allora, $M - m$ è uguale a

(a) 1; (b) 5; (c) 7; (d) 14.

Soluzione. Si ha

$$M = \max_{(x,y)\in Q} f(x, y) = \max_{x\in[-1,1]} 3x^2 - \min_{y\in[0,2]} 2y = 3; \qquad m = \min_{(x,y)\in Q} f(x, y) = \min_{x\in[-1,1]} 3x^2 - \max_{y\in[0,2]} 2y = -4;$$

e da ciò segue $M - m = 7$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Se $\displaystyle\int_E xy\, dV_2(x, y) = 1$, quale dei seguenti insiemi può essere E?

(a) $E = \left\{(x, y) :\ -\sqrt{2} \le x \le \sqrt{2} \text{ e } 0 \le y \le \sqrt{2}\right\}$; (b) $E = \{(x, y) :\ 0 \le x \le 1 \text{ e } -1 \le y \le 0\}$;

(c) $E = \left\{(x, y) :\ 0 \le x \le \sqrt{2} \text{ e } 0 \le y \le \sqrt{2}\right\}$; (d) $E = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

Soluzione. Se l'insieme E fosse definito come in (a) o in (b) l'integrale sarebbe rispettivamente nullo o negativo mentre l'insieme E definito in (d) è illimitato. Nel caso (c) si ha

$$\int_E xy\, dV_2(x, y) = \int_0^{\sqrt{2}} x\, dx \cdot \int_0^{\sqrt{2}} y\, dy = \left(\frac{1}{2} t^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} \right)^2 = 1.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Quale delle seguenti funzioni

(a) $x(t) = e^{2t}$; (b) $x(t) = te^t$; (c) $x(t) = (t + 1)^2 - t$; (d) $x(t) = e^t$;

è soluzione dell'equazione differenziale $x' = -e^{-t}x^2 + e^t \left(t^2 + t + 1\right)$?

Soluzione. Per $x(t) = te^t$ si ha

$$x'(t) = (t + 1)e^t \qquad \text{e} \qquad -e^{-t}[x(t)]^2 + e^t \left(t^2 + t + 1\right) = t^2 e^t + e^t \left(t^2 + t + 1\right) = (t + 1)e^t$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia

$$f(x\,,y) = \left(x^2-1\right)^2 + 8y^2 - y^4, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme

$$K = \left\{(x\,,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \le 5 \text{ e } x\,,y \ge 0\right\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono le funzioni $f_x(x,,y) = 4x\left(x^2-1\right)$ e $f_y(x,,y) = 16y - 4y^3$ per ogni $(x\,,y)$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema simmetrico

$$\begin{cases} 4x(x-1)(x+1) = 0 \\ -4y(y-2)(y+2) = 0 \end{cases}$$

cioè i nove punti di coordinate $(x\,,y)$ con $x \in \{0,\pm1\}$ e $y \in \{0,\pm2\}$. Poiché f è pari in ciascuna variabile x ed y è sufficiente considerare i soli punti di coordinate $(0,0)$, $(0,2)$, $(1,0)$ e $(1,2)$. Le derivate parziali seconde di f sono

$$f_{xx}(x\,,y) = 12x^2 - 4; \qquad f_{yy}(x\,,y) = 16 - 12y^2; \qquad f_{xy}(x,,y) = f_{yx}(x\,,y) = 0;$$

per ogni $(x\,,y)$. Le matrici hessiane di f nei punti critici sono

$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}; \qquad D^2f(0,2) = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix};$$
$$D^2f(1,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 16 \end{pmatrix}; \qquad D^2f(1,2) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -32 \end{pmatrix};$$

e quindi dall'esame dei segni degli autovalori si deduce che i punti di coordinate $(0\,,0)$ e $(\pm1,\pm2)$ sono punti di sella mentre i punti di coordinate $(0\,,\pm2)$ e $(\pm1,0)$ sono rispettivamente punti di massimo e di minimo locale di f.

(b) L'insieme K è il quarto di cerchio di centro nell'origine e raggio $r = \sqrt{5}$ contenuto nel primo quadrante. Esso è chiuso e limitato e la funzione f è continua e quindi per il teorema di Weierstrass esistono il massimo ed il minimo globale di f su K. Poiché nessuno dei punti di massimo o minimo locale è punto interno di K, i punti di minimo e di massimo globale di f su K devono trovarsi sul bordo di K. Studiamo quindi le restrizioni

$$f_1(x) = f(x,0) = \left(x^2-1\right)^2, \quad x \in [0,\sqrt{5}]; \qquad f_2(x) = f(x,\sqrt{5-x^2}) = 16, \quad x \in [0,\sqrt{5}];$$
$$f_3(y) = f(0,y) = 8y^2 - y^4, \qquad y \in [0,\sqrt{5}];$$

di f al bordo di K che è composto dai segmenti $\Gamma_1 = \left\{(x,0) :\ 0 \le x \le \sqrt{5}\right\}$ e $\Gamma_3 = \left\{(0,y) :\ 0 \le y \le \sqrt{5}\right\}$ e dall'arco di circonferenza $\Gamma_2 = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \le 5 \text{ e } x\,,y \ge 0\right\}$. Esaminando le derivate delle funzioni f_i si verifica come prevedibile che f_1 ha un minimo per $x = 1$ ed f_3 ha un massimo per $y = 2$. Denotati allora con $A = (0,0)$, $B = (\sqrt{5},0)$ e $C = (0,\sqrt{5})$ gli estremi dei segmenti Γ_i e dell'arco di circonferenza Γ_2 e posto $P = (1,0)$ e $Q = (0,2)$, risulta $f(A) = 1$, $f(P) = 0$, $f(B) = f(C) = 16$ e $f(Q) = 17$. L'andamento di f sul bordo di K è rappresentato nello schema seguente:

$$\begin{array}{ccccccccccc} & \downarrow & & \uparrow & & = & & \uparrow & & \downarrow & \\ A & & P & & B & & C & & Q & & A \end{array}$$

Pertanto, il minimo globale ed il massimo globale di f su K sono assunti nei punti $P = (1,0)$ e $Q = (0,2)$ rispettivamente.

Esercizio 5. Considerate gli insiemi

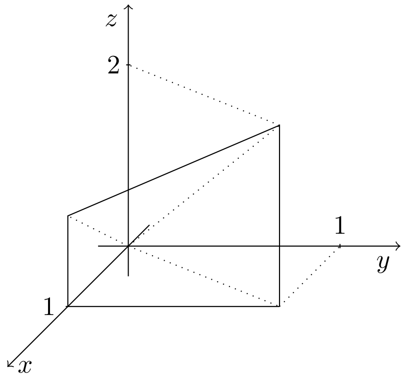
$$A = \{(x\,,y\,,z):\ 0 \le y \le x \le 1 \text{ e } 0 \le z \le x+y\}\,;$$
$$B = \{(x\,,y\,,z):\ 0 \le y \le x \le 1 \text{ e } 0 \le z \le x+y-1\}\,.$$

(a) Descrivete e disegnate gli insiemi A e B.

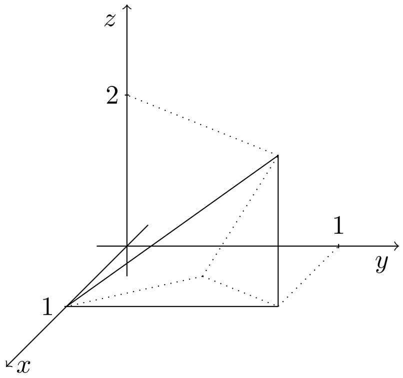
(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_A xy\,dV_3(x\,,y\,,z)$.

(c) Calcolate il volume $|B|$.

Soluzione. (a) L'insieme A è il poliedro di $\mathbb{R}^3$ il cui bordo è contenuto nei piani di equazione $z=0$, $z=x+y$, $y=0$, $x=1$ e $y=x$ (Figura 1). L'insieme B è costituito dai punti di A che stanno al di sotto del piano di equazione $z=x+y-1$ (Figura 2).



(1)



(2)

(b) L'insieme A è evidentemente compatto e, essendo un poliedro, è misurabile. Inoltre, la funzione

$$f(x\,,y\,,z) = xy, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su A.
Calcoliamo l'integrale di f su A mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(A)$ di A sul piano xy è il triangolo chiuso e limitato

$$T_A = \pi_{xy}(A) = \big\{(x\,,y):\ 0 \le y \le x \le 1\big\}$$

e la corrispondente sezione $A_{(x,y)}$ è l'intervallo $[0\,,x+y]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}\int_A xy\,dV_3(x\,,y\,,z) &= \int_{T_A}\left(\int_0^{x+y} xy\,dz\right)dV_2(x\,,y) = \int_{T_A} xy(x+y)\,dV_2(x\,,y) = \\ &= \int_0^1\left(\int_0^x \left[x^2y+xy^2\right]\,dy\right)dx = \frac{1}{6}.\end{aligned}$$

(c) L'insieme B è misurabile per gli stessi motivi per cui A è misurabile. La proiezione $\pi_{xy}(B)$ di B sul piano xy è il triangolo chiuso e limitato

$$T_B = \pi_{xy}(B) = \big\{(x\,,y):\ 1-x \le y \le x \text{ e } 1/2 \le x \le 1\big\}$$

e la corrispondente sezione $B_{(x,y)}$ è l'intervallo $[0\,,x+y-1]$. Si ha allora per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}|B| = \int_{T_B}(x+y-1)\,dV_2(x\,,y) &= \int_{1/2}^1\left(\int_{1-x}^x (x+y-1)\,dy\right)dx = \\ &= \int_{1/2}^1 \left[\frac{1}{2}y^2+(x-1)y\right]\Bigg|_{1-x}^x dx = \\ &= \int_{1/2}^1\left[\frac{1}{2}(x-1)^2+\frac{3}{2}x^2-x\right]dx = \\ &= \frac{1}{6}(x-1)^3+\frac{x^3}{2}-\frac{x^2}{2}\Bigg|_{1/2}^1 = \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' + x' - 2x = te^t + 1 \\ x(0) = 3/2,\ x'(0) = -10/9. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

(b) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione completa.

(c) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = -2$ e $\lambda = 1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{-2t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = e^t$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono date dalle funzioni

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(b) Per determinare tutte le soluzioni dell'equazione completa cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = \left(At^2 + Bt\right) e^t + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $A, B, C \in \mathbb{R}$ sono costanti da determinare. Sostituendo si trova $A = 1/6$, $B = -1/9$ e $C = -1/2$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^t + \frac{1}{18}\left(3t^2 - 2t\right) e^t - \frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(c) Imponendo che risulti $x(0) = 3/2$ e $x'(0) = -10/9$ si trova

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 1/2 = 3/2 \\ x'(0) = -2C_1 + C_2 - 1/9 = -10/9 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 1$. Pertanto la soluzione del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = e^{-2t} + e^t + \frac{1}{18}\left(3t^2 - 2t\right) e^t - \frac{1}{2}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$