COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2015-2016 — PARMA, 28 GENNAIO 2016

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. La direzione di massima pendenza della funzione $f(x,y) = 5x^2y + 3x + 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto $(0,0)$ è

(a) $\left(\frac{2}{\sqrt{13}}, \frac{-3}{\sqrt{13}}\right)$; (b) $\sqrt{13}$; (c) $\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$; (d) $(0,0)$.

Soluzione. Per $\nabla f(0,0) = (f_x(0,0), f_y(0,0) \neq (0,0)$, la direzione di massima pendenza di f in $(0,0)$ è individuata dal vettore

$$v = \frac{\nabla f(0,0)}{\|\nabla f(0,0)\|}.$$

In questo caso si ha $f_x(0,0) = 3$, e $f_y(0,0) = 2$ e da ciò segue

$$v = \frac{\nabla f(0,0)}{\|\nabla f(0,0)\|} = \left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{2}{\sqrt{13}}\right)$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. In $\mathbb{R}^3$ l'equazione $3z^2 = 5 - x^2 - 2y^2$ rappresenta

(a) un piano; (b) un paraboloide; (c) un ellissoide; (d) un cono.

Soluzione. Si ha $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 5$ che è l'equazione dell'ellissoide di centro nell'origine e semiassi $a = \sqrt{5}$, $b = \sqrt{5/2}$ e $c = \sqrt{5/3}$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia T il triangolo di vertici $(0,0)$, $(1,0)$ e $(1,1)$ e sia $I = \int_T e^{1-x^2}\, dV_2(x,y)$. Allora,

(a) $I = \frac{1-3e}{2}$; (b) $I = \frac{e-1}{2}$; (c) $I = 1 - \frac{1}{e}$; (d) nessuna delle altre risposte è vera.

Soluzione. Il triangolo T è l'insieme $T = \{(x,y) :\ 0 \le y \le x \le 1\}$. Integrando prima rispetto ad y e poi rispetto ad x si ha

$$I = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{1-x^2}\, dy\right) dx = \int_0^1 xe^{1-x^2}\, dx = -\frac{1}{2}e^{1-x^2}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{2}.$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia
$$f(x, y) = xy^2 + x^2y - xy, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

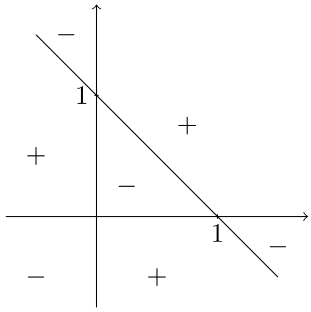
(a) Rappresentate graficamente gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ e $\{f = 0\}$.

(b) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(c) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme

$$T_r = \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \le y \le r - x \text{ e } x \ge 0\big\} \qquad (r > 0).$$

Soluzione. (a) Si ha
$$f(x, y) = xy(y + x - 1), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$
e quindi l'insieme $\{f = 0\}$ è formato dagli assi $x = 0$, $y = 0$ e dalla retta di equazione $y = 1 - x$. Gli insiemi $\{f > 0\}$, $\{f < 0\}$ sono evidenziati in figura:



(b) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono le funzioni $f_x(x, , y) = y^2 + 2xy - y$ e $f_y(x, y) = x^2 + 2xy - x$ per ogni (x, y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema simmetrico
$$\begin{cases} y\,\big(y + 2x - 1\big) = 0 \\ x\,\big(x + 2y - 1\big) = 0 \end{cases}$$
cioè i punti di coordinate $O = (0, 0)$, $A = (0, 1)$, $B = (1, 0)$ e $P = (1/3, 1/3)$. Nei punti O, A e B la funzione f si annulla e quindi, dal segno di f si deduce che tali punti sono punti di sella. Il punto P si trova all'interno del triangolo compatto T_1 di vertici O, A e B sul cui bordo f si annulla. Per il teorema di Weierstrass, i punti di minimo globale e di massimo globale di f su T_1 vanno ricercati sul bordo di T_1 o tra i punti critici appartenenti a $\text{int}(T_1)$ e dal segno di f segue che P è punto di minimo globale di f su T_1 e quindi punto di minimo locale di f su $\mathbb{R}^2$.

(c) Ogni triangolo T_r $(r > 0)$ è compatto e la funzione f è continua. Per il teorema di Weierstrass esistono dunque il massimo ed il minimo globale di f su ogni triangolo T_r $(r > 0)$.

Il massimo ed il minimo globale di f su T_r sono assunti sul bordo di T_r o eventualmente in P per quei valori di $r > 0$ tali che $P \in \text{int}(T_r)$ $(r > 2/3)$. Sui cateti di T_r la funzione f è identicamente nulla e sull'ipotenusa la sua restrizione è la funzione

$$\varphi(x) = f(x, r - x) = x(r - x)(r - 1), \qquad 0 \le x \le r.$$

Per $0 \le r < 1$ la funzione φ assume il minimo in $x = r/2$ ed il massimo in $x = 0$ e $x = r$, per $r = 1$ è identicamente nulla e per $r > 1$ assume il minimo in $x = 0$ e $x = r$ ed il massimo in $x = r/2$.

Pertanto, il minimo globale di f su T_r è assunto nel punto di coordinate $(r/2, r/2)$ per $0 < r \le 2/3$ e nel punto P per $r > 2/3$ poiché P è punto di minimo globale su T_1 $f \ge 0$ sull'ipotenusa di T_r per $r \ge 1$.

Relativamente al massimo globale di f su T_r, esso è assunto nei punti dei cateti di T_r per $0 < r < 1$, nei punti del bordo di T_1 per $r = 1$ e nel punto di coordinate $(r/2, r/2)$ per $r > 1$.

Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x,y,z) : \, x^2 + y^2 + z^2 \le 5, \, x^2 + y^2 \le 4z \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

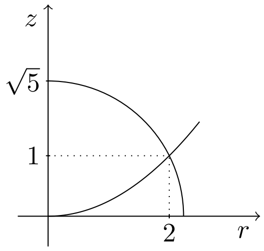
(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K 2xyz \, dV_3(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è formato dai punti di coordinate $x,y \ge 0$ tali che

$$x^2 + y^2 + z^2 \le 5 \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 \le 4z$$

e quindi è la porzione di spazio ottenuta dall'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra la parabola di equazione $z = r^2/4$ e l'arco di circonferenza $r^2 + z^2 = 5$ $(r, z \ge 0)$ come illustrato in figura.



Le coordinate $(2,1)$ dell'intersezione tra cerchio e parabola si trovano risolvendo il sistema

$$\begin{cases} r^2 + z^2 = 5 \\ r^2 = 4z. \end{cases}$$

L'insieme K è quindi formato dai punti (x,y,z) con coordinate $x,y \ge 0$ che stanno al di sopra del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 - 2$ e al di sotto del cono di equazione $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è l'intersezione di un solido di rotazione e di un poliedro. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = 2xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su K.

Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di integrazione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y) : \, \sqrt{x^2 + y^2} \le 2 \text{ e } x,y \ge 0\right\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo $[(x^2 + y^2)/4, \sqrt{5 - x^2 - y^2}]$. Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K 2xyz \, dV_3(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)/4}^{\sqrt{5-x^2-y^2}} 2xyz \, dz \right) dV_2(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - \left(x^2 + y^2\right) - \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{16} \right] dV_2(x,y). \end{aligned}$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - \left(x^2 - y^2\right) - \frac{\left(x^2 + y^2\right)^2}{16} \right] dV_2(x,y) &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \cdot \int_0^2 r^3 \left(5 - r^2 - \frac{r^4}{16}\right) dr = \\ &= \frac{1}{4} \int_0^4 s \left(5 - s - \frac{s^2}{16}\right) ds \end{aligned}$$

da cui segue infine con semplici calcoli

$$I = \frac{1}{4} \int_0^4 s \left(5 - s - \frac{s^2}{16}\right) ds = \frac{1}{4} \left\{ \frac{5}{2}s^2 - \frac{s^3}{3} - \frac{s^4}{64} \right\} \Bigg|_0^4 = \frac{11}{3}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x' = 2tx + 2t^3 - 4t \\ x(1) = e. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione $x' = 2tx + 2t^3 - 4t$.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Posto

$$A(t) = \int 2t\,dt = t^2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

tutte le sue soluzioni sono date da

$$x(t) = e^{t^2} \int \left(2t^3 - 4t\right) e^{-t^2}\,dt.$$

Si ha

$$\int \left(2t^3 - 4t\right) e^{-t^2}\,dt = \int (s-2)e^{-s}\,ds\Big|_{s=t^2} = (1-s)e^{-s}\Big|_{s=t^2} + C = \left(1 - t^2\right) e^{-t^2} + C$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Quindi, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = Ce^{t^2} - t^2 + 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con C costante arbitraria.

(b) Imponendo che risulti $x(1) = e$ si trova $Ce = e$ ovvero $C = 1$. Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$x(t) = e^{t^2} - t^2 + 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$