COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6	
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2015-2016 — PARMA, 14 GENNAIO 2016

Compilate l' intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x,y) = 1/\sqrt{x^2+2y^2} + \log(3+y)$ nel punto di coordinate $(2,-2)$ è

(a) $z = -\dfrac{\sqrt{3}}{36}x + \dfrac{18+\sqrt{3}}{18}y + 2 + \dfrac{\sqrt{3}}{3}$; (b) $z = x - 2y - 6 + \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$; (c) $z = x - 3y + 5$; (d) $z = \dfrac{1}{\sqrt{12}}$.

Soluzione. L'equazione del piano tangente al grafico di f in (x_0, y_0) è

$$z = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Si ha $f(2,-2) = 1/\sqrt{12}$ e

$$f_x(2,-2) = -\left.\frac{x}{(x^2+2y^2)^{3/2}}\right|_{x=2,y=-2} = -\sqrt{3}/36;$$

$$f_y(2,-2) = -\left.\frac{2y}{(x^2+2y^2)^{3/2}} + \frac{1}{y+3}\right|_{x=2,y=-2} = \sqrt{3}/18 + 1$$

e quindi la risposta corretta è (a).

Esercizio 2. La funzione $x(t) = e^{2t} - 1$, $t \in \mathbb{R}$, risolve l'equazione differenziale

(a) $x' = 2x$; (b) $x' = x + 1$; (c) $x' = 2x + 2$; (d) $x' = x$.

Soluzione. Si ha

$$x'(t) = 2e^{2t} = 2\left(e^{2t} - 1\right) + 2 = 2x(t) + 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. La funzione $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ ha minimo globale nel punto $(0,0)$. Indicate, giustificando la risposta, quale delle seguenti matrici può essere la sua matrice hessiana $D^2 f(0,0)$.

(a) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; (b) $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (c) $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$; (d) $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La matrice hessiana $D^2 f(0,0)$ è simmetrica e questo esclude le matrici (a) e (c). La matrice in (b) ha autovalori positivi (determinante positivo e traccia positiva) mentre la matrice in (d) ha autovalori negativi (determinante positivo e traccia negativa). La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia
$$f(x\,,y) = 12xy^2 + 4y^2 - 27x^3 - 9x^2, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate $\inf\big\{f(x\,,y):\ (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\big\}$ e $\sup\big\{f(x\,,y):\ (x\,,y)\in\mathbb{R}^2\big\}$.

(c) Giustificate l'esistenza del massimo globale e del minimo globale di f su $R = [-2,0]\times[0,1]$.

(d) Determinate il massimo ed il minimo globale di f su R.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono $f_x(x,\,,y) = 12y^2 - 81x^2 - 18x$ e $f_y(x\,,y) = 24xy + 8y$ per ogni $(x\,,y)$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema
$$\begin{cases} 12y^2 - 81x^2 - 18x = 0 \\ 24xy + 8y = 0 \end{cases}$$
cioè i punti di coordinate $(0,0)$, $(-2/9,0)$ e $(-1/3,\pm1/2)$. Le derivate parziali seconde di f sono
$$f_{xx}(x\,,y) = -162x - 18; \qquad f_{yy}(x\,,y) = 24x + 8; \qquad f_{xy}(x\,,y) = f_{yx}(x\,,y) = 24y;$$
per ogni $(x\,,y)$. Le matrici hessiane di f nei punti critici sono
$$D^2f(0,0) = \begin{pmatrix} -18 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix}; \qquad D^2f(-2/9,0) = \begin{pmatrix} 18 & 0 \\ 0 & 8/3 \end{pmatrix}; \qquad D^2f(-1/3,\pm1/2) = \begin{pmatrix} 36 & \pm12 \\ \pm12 & 0 \end{pmatrix};$$
e quindi il punto di coordinate $(-2/9,0)$ è punto di minimo locale di f (determinante positivo e traccia positiva) mentre i punti di coordinate $(0\,,0)$ e $(-1/3,\pm1/2)$ sono punti di sella (determinante negativo).
(b) Si ha $f(x\,,0) = -27x^3 - 9x^2$ per ogni $x\in\mathbb{R}$ e $f(0\,,y) = 4y^2$ per ogni $y\in\mathbb{R}$. Quindi risulta
$$\inf_{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2} f(x\,,y) = -\infty \quad \text{e} \quad \sup_{(x\,,y)\in\mathbb{R}^2} f(x\,,y) = +\infty.$$

(c) Il rettangolo R è chiuso e limitato e la funzione f è continua. Per il teorema di Weierstrass esistono dunque il massimo ed il minimo globale di f su R.
(d) Poichè f non ha estremi locali interni ad R, i punti di minimo e di massimo globale di f su R devono trovarsi sul bordo di R. Studiamo quindi le restrizioni
$$\begin{aligned} &f_1(x) = f(x\,,0) = -27x^3 - 9x^2, && x\in[-2,0]; \quad && f_2(y) = f(0\,,y) = 4y^2, && y\in[0,1]; \\ &f_3(x) = f(x\,,1) = -27x^3 - 9x^2 + 12x + 4, && x\in[-2,0]; \quad && f_4(y) = f(-2\,,y) = -20y^2 + 180, && y\in[0,1]; \end{aligned}$$
di f ai segmenti $\Gamma_1 = \big\{(x\,,0):\ x\in[-2,0]\big\}$, $\Gamma_2 = \big\{(0\,,y):\ y\in[0,1]\big\}$, $\Gamma_3 = \big\{(x\,,1):\ x\in[-2,0]\big\}$ e $\Gamma_4 = \big\{(-2\,,y):\ y\in[0,1]\big\}$ che costituiscono il bordo di R. Esaminando le derivate delle funzioni f_i si verifica che f_1 ha un minimo per $x = -2/9$ (come prevedibile) e che f_3 ha un massimo per $x = -(1+\sqrt{13})/9$. Denotati con $A = (-2,0)$, $B = (0,0)$, $C = (0,1)$ e $D = (-2,1)$ i vertici del rettangolo e posto $P = (-2/9,0)$ e $Q = ((1+\sqrt{13})/9,1)$, l'andamento di f sul bordo di R è rappresentato nello schema seguente:
$$\begin{array}{ccccccccccccc} & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & & \uparrow & \\ A & & P & & B & & C & & Q & & D & & A \end{array}$$
Pertanto, il massimo globale di f va ricervato tra i punti A e C ed il minimo globale tra i punti P e Q. Si ha
$$f(A) = 180; \qquad f(C) = 4; \qquad f(P) = -\frac{4}{27}; \qquad f(Q) = -2\frac{13\sqrt{13}-35}{27}.$$
Il massimo globale di f in R è dunque assunto in A e da $\sqrt{13} > 3$ segue $13\sqrt{13} - 35 > 13\cdot3 - 35 = 4$ cosicché il minimo globale di f in R è assunto in Q.

Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : \ -2 + x^2 + y^2 \le z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } x, y \ge 0\right\}.$$

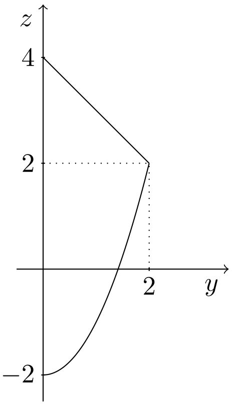
(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K (x + y)\, dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è formato dai punti di coordinate $x, y \ge 0$ tali che

$$-2 + x^2 + y^2 \le z \le 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$$

e quindi è la porzione di spazio ottenuta dall'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) che sta sopra la parabola di equazione $z = r^2 - 2$ e sotto la retta di equazione $z = 4 - r$ come illustrato in figura.



L'insieme K è quindi formato dai punti (x, y, z) con coordinate $x, y \ge 0$ che stanno al di sopra del paraboloide di equazione $z = x^2 + y^2 - 2$ e al di sotto del cono di equazione $z = 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$.

(b) L'insieme K è misurabile essendo l'intersezione di un solido di rotazione e di due semispazi ed è anche compatto essendo limitato e chiuso poiché esprimibile come controimmagine di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, la funzione $f(x, y) = x + y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è lineare e quindi integrabile su K. Integriamo per strati: la proiezione di $\pi_z(K)$ sull'asse z è l'intervallo $[-2, 4]$ e per ogni $z \in [-2, 4]$ la corrispondente sezione K^z di K è l'insieme

$$K^z = \begin{cases} \left\{(x, y) : \ \sqrt{x^2 + y^2} \le \sqrt{z + 2} \text{ e } x, y \ge 0\right\} & \text{se } z \in [-2, 2]; \\ \left\{(x, y) : \ \sqrt{x^2 + y^2} \le 4 - z \text{ e } x, y \ge 0\right\} & \text{se } z \in [2, 4]. \end{cases}$$

Si ha allora per la formula di riduzione

$$I = \int_{-2}^{2} \left(\int_{K^z} (x + y)\, dV_2(x, y) \right) dz + \int_{2}^{4} \left(\int_{K^z} (x + y)\, dV_2(x, y) \right) dz.$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta

$$\int_{K^z} (x + y)\, dV_2(x, y) = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \cdot \int_0^{\sqrt{z+2}} r^2\, dr = \frac{2}{3}(z + 2)^{3/2}, \qquad z \in [-2, 2];$$

$$\int_{K^z} (x + y)\, dV_2(x, y) = \int_0^{\pi/2} (\cos\theta + \operatorname{sen}\theta)\, d\theta \cdot \int_0^{4-z} r^2\, dr = \frac{2}{3}(4 - z)^3, \qquad z \in [2, 4];$$

da cui segue infine

$$I = \int_{-2}^{2} \frac{2}{3}(z + 2)^{3/2}\, dz + \int_2^4 \frac{2}{3}(4 - z)^3\, dz = \frac{4}{15}(z + 2)^{5/2}\Big|_{-2}^{2} - \frac{1}{6}(4 - z)^4\Big|_2^4 = \frac{128}{15} + \frac{8}{3} = \frac{56}{5}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'' - 4x' + 8x = e^{2t} \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione omogenea associata.

(b) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione completa.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0$ e le sue soluzioni sono $\lambda = 2 \pm 2i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{2t} \cos(2t) \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = e^{2t} \operatorname{sen}(2t)$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = Ae^{2t} \cos(2t) + Be^{2t} \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.
(b) Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = Ce^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

ove $C \in \mathbb{R}$ è una costante da determinare. Si ha

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) + 8x_p(t) = 4Ce^{2t} - 8Ce^{2t} + 8Ce^{2t} = 4Ce^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

cosicché la funzione x_p è soluzione dell'equazione completa per $C = 1/4$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$(*) \qquad x(t) = Ae^{2t} \cos(2t) + Be^{2t} \operatorname{sen}(2t) + \frac{1}{4}e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie.
(c) Scegliamo A e B in modo che la soluzione x definita da $(*)$ sia tale che $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = A + 1/4 \\ x'(0) = 2A + 2B + 1/2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $A = -1/4$ e $B = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{4}\big(1 - \cos(2t)\big)\, e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$