Integrale definito

Problema delle aree degli insiemi piani

Vogliamo introdurre una applicazione che

Area: Sottoinsieme di $\mathbb{R}^2 \longmapsto$ numero reale non negativo

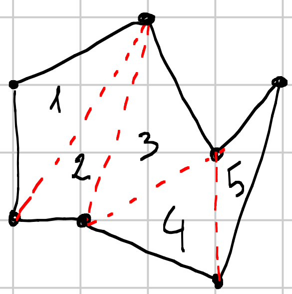
Questa applicazione voglio soddisfi

1) Area (Rettangolo) $\equiv$ base $\times$ altezza

2) $A \subseteq B \Rightarrow$ Area $(A) \leq$ Area (B) (monotonia)

3) Dato A e $T(A)$ = rototraslazione di A $\Rightarrow$ Area (A) = Area $(T(A))$

Il problema delle aree è tra i più antichi; gli agrimensori, conoscendo (formula di Erone) come calcolare l'area del triangolo, sapevano calcolare l'area di una figura delimitata da segmenti

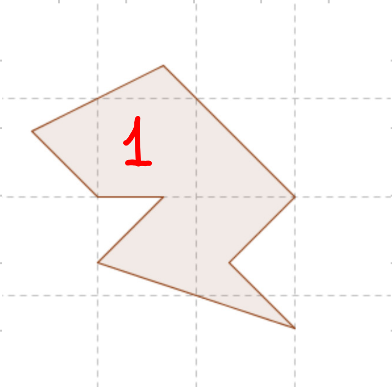


e l'area risulta essere la somma delle aree di 5 triangoli, in questo caso.

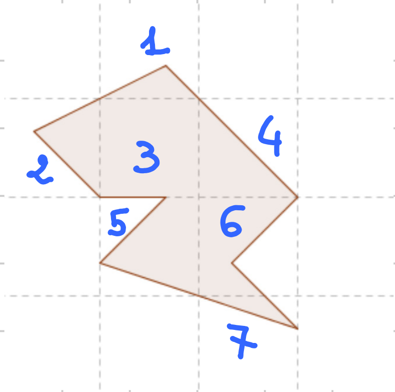
Ma come si procede in generale?
L'idea è approssimare "dall'interno" e "dall'esterno"

Rettangoli interni ad A

Rettangoli che contengono A



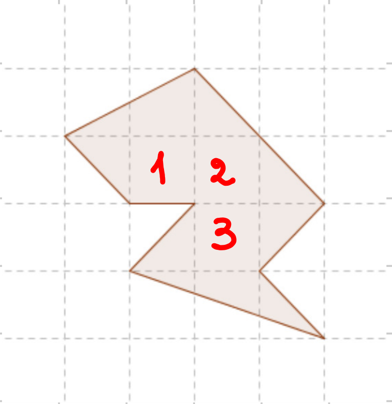
ogni quadratino misura $9u^2$



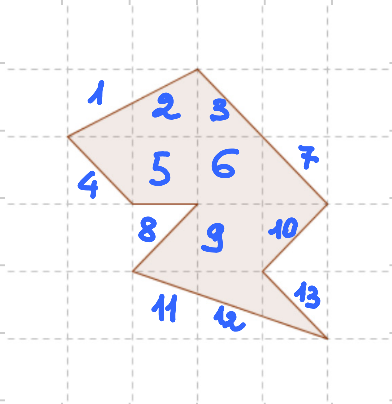
$$\text{EXT} - \text{INT} = 7 - 1 = 6 \rightarrow 54\, u^2$$

$(1 \text{ quadretto} = 9u^2)$

Infittisco la quadrettatura



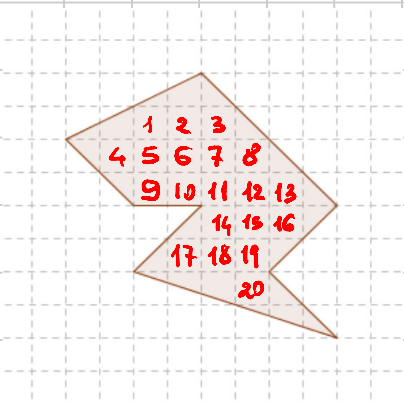
ogni quadratino misura $4u^2$



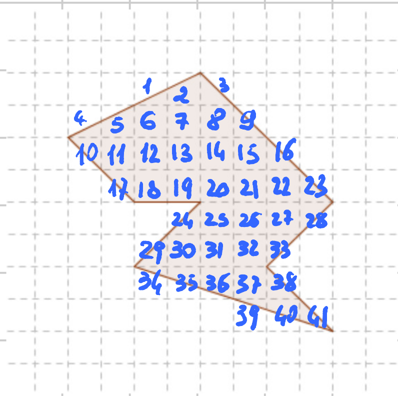
$$\text{EXT} - \text{INT} = 13 - 3 = 10 \rightarrow 40\, u^2$$

$(1 \text{ quadretto} = 4u^2)$

Infittisco



Ogni quadratino misura $1u^2$

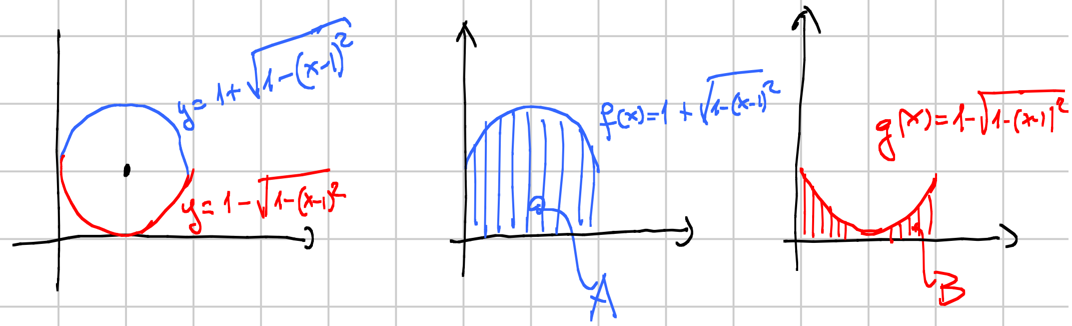


$$\text{EXT} - \text{INT} = 41 - 20 = 21 \rightarrow 21\, u^2$$

$(1 \text{ quadretto} = 1\, u^2)$

Osserviamo che l'area di un cerchio, per esempio

$$(x-1)^2+(y-1)^2=1$$

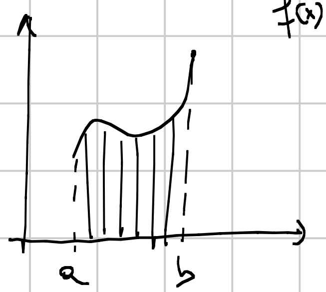


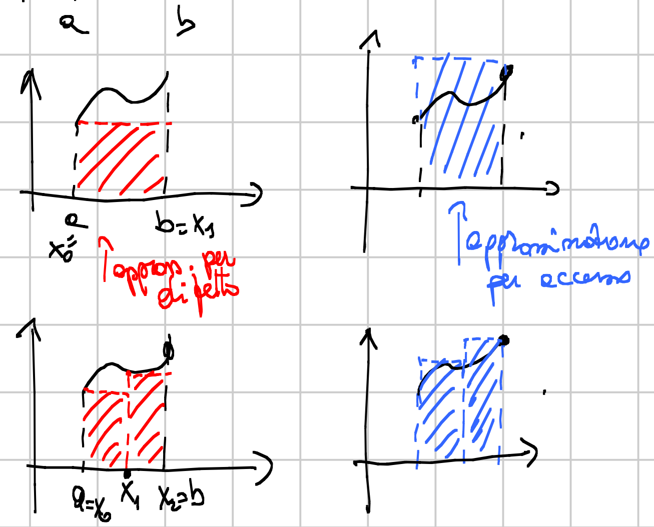
Area (del cerchio) $\equiv$ Area (A) $-$ Area (B)

Questo mi dice che calcolando l'area dei sottografici riesco a calcolare l'area di regioni piane

Dunque mi propongo l'obiettivo di calcolare l'"area" dei sottografici

$f(x)\geq 0$ cerchiamo di approssimare per eccesso e per difetto l'area di $\{(x,y): a\leq x\leq b \quad 0\leq y\leq f(x)\}$





Def (suddivisione)

Dato un intervallo $[a,b]$, diciamo "suddivisione di $[a,b]$" un qualsiasi insieme di punti $\mathcal{A}=\{a=x_0<x_1<\dots<x_n=b\}$

Def (somme per eccesso e per difetto)

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata in $[a,b]$ chiuso e limitato diciamo

somma di Darboux per difetto relativa alla suddivisione $\mathcal{A}$ ed alla f.ne f

$$s(f,\mathcal{A})=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\cdot\inf f([x_k,x_{k+1}])$$

$$=(x_1-x_0)\cdot\inf f([x_0,x_1])+(x_2-x_1)\cdot\inf f([x_1,x_2])+\dots$$

$$\dots+(x_n-x_{n-1})\cdot\inf f([x_{n-1},x_n])$$

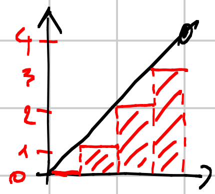
somma di Darboux per eccesso relativa alla suddivisione $\mathcal{A}$ ed alla f.ne f

$$S(f,\mathcal{A})=\sum_{k=0}^{n-1}(x_{k+1}-x_k)\sup f([x_k,x_{k+1}])$$

Esempio $f(x)=x$ $\quad [a,b]=[0,4]$ $\quad \mathcal{A}=\{0,1,2,3,4\}$

$$s(f,\mathcal{A})=(1-0)\cdot\inf f([0,1])+(2-1)\cdot\inf f([1,2])+(3-2)\inf f([2,3])+(4-3)\cdot\inf f([3,4])$$

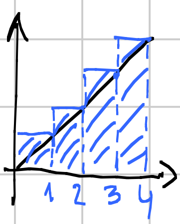
$$=0+1+2+3=6$$



$$S(f,\mathcal{A})=\sum_{k=0}^{3}(x_{k+1}-x_k)\cdot\sup f([x_k,x_{k+1}])=$$

$$=(\underset{1}{x_1}-\underset{0}{x_0})\cdot\sup f([\underset{0}{x_0},\underset{1}{x_1}])+(\underset{2}{x_2}-\underset{1}{x_1})\sup f([\underset{1}{x_1},\underset{2}{x_2}])+\dots$$

$$=1\cdot 1+1\cdot 2+1\cdot 3+1\cdot 4=10$$



Vediamo la monotonia di $s(f,A)$ ed $S(f,A)$ quando $f(x)=x$ e $A_0=\{0,3\}$ $A_1=\{0,\frac{3}{2},3\}$ $A_2=\{0,1,2,3\}$

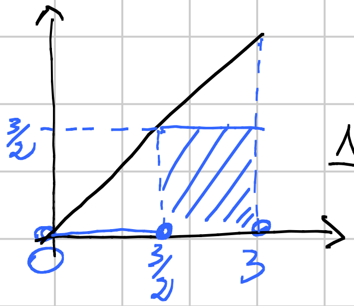
$A_0=\{0,3\}$

$\Delta S(f,A_0)=9-0=9$

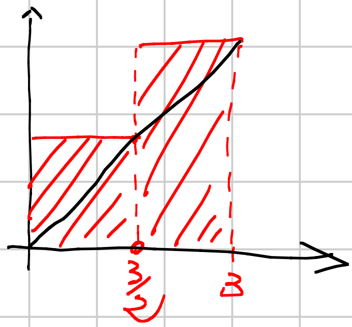
$s(f,A_0)=(3-0)\cdot 0=0$

$S(f,A_0)=(3-0)\cdot 3=9$

$A_1=\{0,\frac{3}{2},3\}$



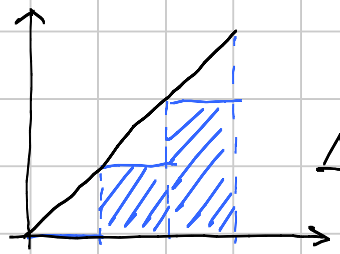
$\Delta S(f,A_1)=\frac{27}{4}-\frac{9}{4}=\frac{9}{2}$



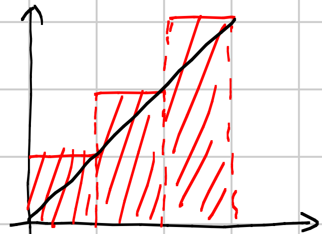
$s(f,A_1)=(\frac{3}{2}-0)\cdot 0+(3-\frac{3}{2})\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{4}$

$S(f,A_1)=(\frac{3}{2}-0)\cdot\frac{3}{2}+(3-\frac{3}{2})\cdot 3=\frac{27}{4}$

$A_2=\{0,1,2,3\}$



$\Delta S(f,A_2)=6-3=3$



$s(f,A_2)=0+1+2=3$

$S(f,A_2)=1+2+3=6$

Si può osservare che

$s(f,A_0)\leq s(f,A_1)\leq s(f,A_2)\leq S(f,A_2)\leq S(f,A_1)\leq S(f,A_0)$

Ma questo vale in generale?

Teorema (proprietà delle somme per eccesso e per difetto) 6

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato
Siano $\mathcal{A},\mathcal{B}$ due suddivisioni di $[a,b]$

1) $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B} \Rightarrow s(f,\mathcal{A})\leq s(f,\mathcal{B})$

$$S(f,\mathcal{A})\geq S(f,\mathcal{B})$$

2) $s(f,\mathcal{A})\leq S(f,\mathcal{A})$ (banale)

3) $s(f,\mathcal{A})\leq S(f,\mathcal{B})$ (ogni somma per difetto è inferiore a ogni somma x eccesso)

dim

3) infatti, presa $\mathcal{C}=\mathcal{A}\cup\mathcal{B}$ si ha che
i) $s(f,\mathcal{A})\leq s(f,\mathcal{C})$ (dalla 1) poiché $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{C}$)

ii) $s(f,\mathcal{C})\leq S(f,\mathcal{C})$ (per la 2))

iii) $S(f,\mathcal{C})\leq S(f,\mathcal{B})$ (segue dalla 1) poiché $\mathcal{B}\subseteq\mathcal{C}$)

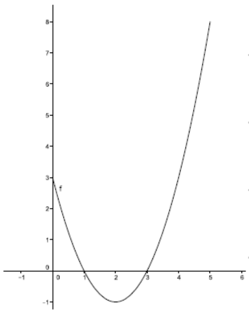
per la transitività dell'ordine si ha $s(f,\mathcal{A})\leq S(f,\mathcal{B})$

1) Data $\mathcal{A}=\{x_0<x_1<\dots<x_m\}$, supponiamo $\mathcal{B}=\mathcal{A}\cup\{\bar{x}\}$
e non è restrittivo supporre $\mathcal{B}=\{x_0<\bar{x}<x_1<\dots<x_m\}$

$$s(f,\mathcal{B})=(\bar{x}-x_0)\inf f([x_0,\bar{x}])+(x_1-\bar{x})\inf f([\bar{x},x_1])+\sum_{k=1}^{m-1}(x_{k+1}-x_k)\inf f([x_k,x_{k+1}])$$
$$\geq(\bar{x}-x_0)\inf f([x_0,x_1])+(x_1-\bar{x})\inf f([x_0,x_1])+ \quad ''$$
$$=s(f,\mathcal{A})$$

Analogamente, essendo
$$(\bar{x}-x_0)\sup f([x_0,\bar{x}])+(x_1-\bar{x})\sup f([\bar{x},x_1])\leq(\bar{x}-x_0)\sup f([x_0,x_1])+(x_1-\bar{x})\sup f([x_0,x_1])$$
si ha $S(f,\mathcal{B})\leq S(f,\mathcal{A})$

2) essendo $\sup\Omega\geq\inf\Omega$ $\forall\Omega\neq\emptyset$ si ha $s(f,\mathcal{A})\leq S(f,\mathcal{A})$
$\forall\mathcal{A}$ suddivisione $\blacksquare$

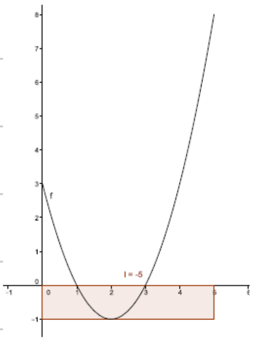


$f(x) = x^2 - 4x + 3$.

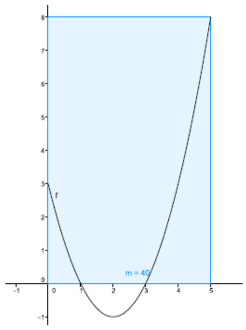
vogliamo approssimare l' "area con segno" sottesa dal grafico di f, ovvero

$$\text{Area}\left(\{(x,y) : 0 \leq x \leq 5 \quad 0 \leq y \leq f^+(x)\}\right)$$
$$- \text{Area}\left(\{(x,y) : 0 \leq x \leq 5 \quad 0 \leq y \leq f^-(x)\}\right)$$

$\mathcal{A}_1 \equiv \{0,2\}$



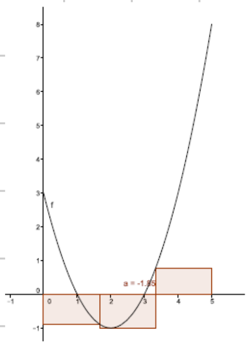
$$\Delta S(f,\mathcal{A}_1) = 45$$
$$\| $$
$$S(f,\mathcal{A}_1) - s(f,\mathcal{A}_1)$$



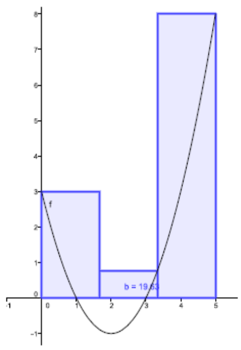
$s(f,\mathcal{A}_1) = 5 \cdot \inf f([0,5]) = -5.$

$S(f,\mathcal{A}_1) = 5 \cdot \sup f([0,5]) = 40.$

$\mathcal{A}_2 = \{0, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, 5\}$



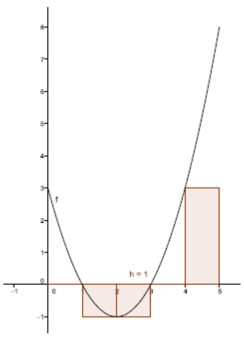
$$\Delta S(f,\mathcal{A}_2) = 21{,}48$$



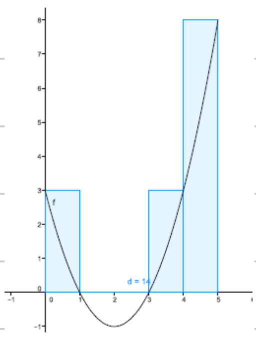
$$s(f,\mathcal{A}_2) = \frac{3}{2} \cdot \inf f\left(\left[0,\tfrac{3}{2}\right]\right) + \frac{3}{2} \inf f\left(\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{2}\right]\right) + \frac{3}{2} \inf f\left(\left[\tfrac{7}{2},5\right]\right) = -1{,}85$$

$$S(f,\mathcal{A}_2) = \frac{3}{2} \cdot \sup f\left(\left[0,\tfrac{3}{2}\right]\right) + \frac{3}{2} \sup f\left(\left[\tfrac{3}{2},\tfrac{7}{2}\right]\right) + \frac{3}{2} \sup f\left(\left[\tfrac{7}{2},5\right]\right) = 19{,}63.$$

$\mathcal{A}_5 = \{0,1,2,3,4,5\}$



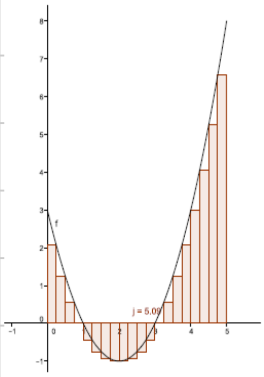
$$\Delta S(f,\mathcal{A}_5) = 13$$



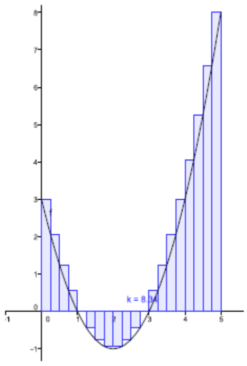
$$s(f,\mathcal{A}_5) = \sum_{k=0}^{4} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) = 1$$

$$S(f,\mathcal{A}_5) = \sum_{k=0}^{4} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}]) = 14$$

$\mathcal{A}_{20}$



$\Delta s(f,\mathcal{A}_{20}) = 3{,}25$



$s(f,\mathcal{A}_{20}) = \sum_{k=0}^{19} (x_{k+1}-x_k) \inf f([x_k,x_{k+1}]) = 5{,}09$ $\quad S(f,\mathcal{A}_{20}) = \sum_{k=0}^{19} (x_{k+1}-x_k) \sup f([x_k,x_{k+1}]) = 8{,}34$

Def (integrale definito)

Data $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato

diciamo che "f integrabile (secondo Riemann) su $[a,b]$"

se

$$s(f) = \sup\{s(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\}$$

$$= \inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A} \text{ suddivisione di } [a,b]\} = S(f)$$

e in tal caso $\quad s(f) = S(f) = \int_a^b f(x)dx \in \mathbb{R}$

IMPORTANTE: parlo di integrale (di Riemann) definito per f.ni $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitate su intervalli chiusi e limitati

Oss: ovviamente $s(f) \le S(f)$ $\forall f$!

Esempio la funzione $f(x)=3$ è integrabile su $[1,10]$ e si ha

$$\int_1^{10} f(x)dx = \int_1^{10} 3\cdot dx = 9\cdot 3 = 27$$

Controesempio (f.ne limitata su int. chiuso e limitato <u>non</u> Riemann-integrabile)

Data $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in \mathbb{Q} \\ 0 & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$, questa <u>non</u> <u>è</u> integrabile su $[0,100]$

infatti ricordo che $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists q \in \mathbb{Q}\ x<q<y$
" " $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ " " " $\mathbb{R}$: $\forall x, y \in \mathbb{R}\ \exists t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}\ x<t<y$

ma allora, da $\mathcal{A}$ suddivisione di $[0,100]$
$\mathcal{A} = \{x_0 = 0 < x_1 < \dots < x_m = 100\}$
preso $[x_k, x_{k+1}]$

1) $\exists q \in \mathbb{Q}$: $x_k < q < x_{k+1}$ $\Rightarrow \sup f([x_k, x_{k+1}]) = f(q) = 1$

2) $\exists t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $x_k < t < x_{k+1}$ $\Rightarrow \inf f([x_k, x_{k+1}]) = f(t) = 0$

$\Downarrow$

$$s(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot 0 = 0$$

$$S(f, \mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) \sup f([x_k, x_{k+1}]) = \sum_{k=0}^{m-1} (x_{k+1} - x_k) = x_m - x_0 = 100$$

dunque $s(f, \mathcal{A}) < S(f, \mathcal{A})$ che è la tesi $\boxed{\mathrm{W}}$

Oss: in generale, data $f: [a,b] \to \mathbb{R}$, si ha che posto
$A = \{ s(f, \mathcal{A}) : \mathcal{A}$ suddivisione di $[a,b]\} \subseteq \mathbb{R}$
e $B = \{ S(f, \mathcal{B}) : \mathcal{B}$ " " " $\} \subseteq \mathbb{R}$
sono t.c. $\forall a \in A\ \forall b \in B\ \ a \leq b$
$\Rightarrow$ (Assioma di Dedekind) $\exists c \in \mathbb{R} : a \leq c \leq b \ \ \forall a, b \in \mathbb{R}$

Se c è unico, allora f è integrabile secondo Riemann!!!

Teorema (caratterizzazione delle funzioni integrabili)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato

Sono tra loro equivalenti

1) f integrabile su $[a,b]$

2) $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{A}_\varepsilon,\mathcal{B}_\varepsilon$ suddivisioni di $[a,b]$: $S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<\varepsilon$

3) $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{C}_\varepsilon$ " " " : $S(f,\mathcal{C}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{C}_\varepsilon)<\varepsilon$

dim

$s(f)=\sup\{s(f,\mathcal{B}) : \mathcal{B}\text{ suddiv.}\}$

$S(f)=\inf\{S(f,\mathcal{A}) : \mathcal{A}\text{ sudd.}\}$

1) $\Rightarrow$ 2) ipotesi $s(f)=S(f)=\int_a^b f(x)dx \Rightarrow$ Ts $\forall\varepsilon>0\exists\mathcal{A}_\varepsilon,\mathcal{B}_\varepsilon : S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<\varepsilon$

$$\int_a^b f=s(f)=\sup\dots\begin{cases}\int_a^b f(x)dx\geq s(f,\mathcal{B}) & \forall\mathcal{B}\text{ suddiv.}\\ \boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{B}_\varepsilon\text{ sudd. } \int_a^b f(x)dx-\varepsilon<s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)}\ (a)\end{cases}$$

$$\int_a^b f=S(f)=\inf\dots\begin{cases}\int_a^b f(x)dx\leq S(f,\mathcal{A})\ \forall\mathcal{A}\text{ sudd.}\\ \boxed{\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{A}_\varepsilon\text{ sudd. } S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)<\int_a^b f(x)dx+\varepsilon}\ (b)\end{cases}$$

(a) + (b) $\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{A}_\varepsilon,\mathcal{B}_\varepsilon$ sudd. $\begin{cases}-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<\varepsilon-\int_a^b f(x)dx\\ S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)<\varepsilon+\int_a^b f(x)dx\end{cases}$

$\Downarrow$

$\forall\varepsilon>0\ \exists\mathcal{A}_\varepsilon,\mathcal{B}_\varepsilon$ sudd. $S(f,\mathcal{A}_\varepsilon)-s(f,\mathcal{B}_\varepsilon)<2\varepsilon$

$2) \Rightarrow 3)$ poniamo $\mathcal{C}_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon$

per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ mod. $S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

$$A_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad S(f, A_\varepsilon) \geq S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \quad (i)$$

$$B_\varepsilon \subseteq \mathcal{C}_\varepsilon \quad \Rightarrow \quad -s(f, B_\varepsilon) \geq -s(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \quad (ii)$$

$$\Downarrow$$

i) + ii)

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon \text{ e } \mathcal{C}_\varepsilon = A_\varepsilon \cup B_\varepsilon \quad S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{C}_\varepsilon) \leq S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$$

$3) \Rightarrow 2)$ per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists \mathcal{C}_\varepsilon$ mod. $S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$

pongo $A_\varepsilon = B_\varepsilon = \mathcal{C}_\varepsilon \Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ mod. $S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

$2) \Rightarrow 1)$ per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \; \exists A_\varepsilon, B_\varepsilon$ mod. $S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$

ricordo che
$$\forall A_\varepsilon \quad S(f) \leq S(f, A_\varepsilon)$$
$$\forall B_\varepsilon \quad s(f) \geq s(f, B_\varepsilon)$$
$$\forall B_\varepsilon \quad -s(f) \leq -s(f, B_\varepsilon)$$

$$\Rightarrow \forall A_\varepsilon, B_\varepsilon \quad S(f) - s(f) \leq S(f, A_\varepsilon) - s(f, B_\varepsilon) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \quad 0 \leq S(f) - s(f) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow S(f) - s(f) = 0$$

A questo punto si pone il problema di caratterizzare classi di funzioni integrabili

Classe delle funzioni MONOTONE

" " " CONTINUE

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato
se f monotona allora f è R- integrabile

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$ limitata su $[a,b]$ chiuso e limitato
se f continua $\forall x \in [a,b]$ allora f è R- integrabile