

Esempio Determinate tutte soluzioni di
 $(2z - i)^4 = 1$

dim

Polinomio a coeff. complessi di 4° grado
 (non mi aspetto soluzioni complesse coniugate!)

Per il Teorema fondamentale dell'Algebra $\exists 4$ radici (con dovuta molteplicità)

1 eq. di 4° grado $\rightarrow$ 4 eq. di 1° grado
 determinando le $\sqrt[4]{1}$, che sono 4 $\neq$ tra loro!

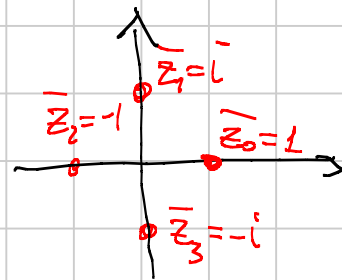
$$1 = \cos(0) + i \sin(0)$$

$$\bar{z}_0 = \cos\left(\frac{0}{4}\right) + i \sin\left(\frac{0}{4}\right) = 1$$

$$\bar{z}_1 = i$$

$$\bar{z}_2 = -1$$

$$\bar{z}_3 = -i$$



$$\begin{cases} 2z - i = 1 \\ 2z - i = i \\ 2z - i = -1 \\ 2z - i = -i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ z_2 = i \\ z_3 = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2} \\ z_4 = 0 \end{cases}$$



Procedimento di Cordano

Considero l'eq. $z^3 - 3pz - 2q = 0$

Esercizio Date $z^3 + az^2 + bz + c = 0$
 determinate α t.c. posto $z = y + \alpha$
 si ottenga $y^3 + \bar{b}y + \bar{c} = 0$

dim

$$(y + \alpha)^3 + a(y + \alpha)^2 + b(y + \alpha) + c = 0$$

$$y^3 + 3y^2\alpha + 3y\alpha^2 + \alpha^3 + ay^2 + 2a\alpha y + a\alpha^2 + by + b\alpha + c = 0$$

$$y^3 + y^2(3\alpha + a) + y(3\alpha^2 + 2a\alpha + b) + (\alpha^3 + a\alpha^2 + b\alpha + c) = 0$$

e preso $\alpha = -\frac{a}{3}$ si ottiene il risultato voluto

Invece di cercare z che risolve l'eq.,
Erdos introduce u e v t.c.

$$z = u + v$$

che risolvano l'eq. (da 1 grado di
libertà fanno 2 gradi)

$$(u+v)^3 - 3p(u+v) - 2q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 3p(u+v) - 2q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3uv(u+v) - 3p(u+v) - 2q = 0$$

$$u^3 + v^3 + 3(u+v)[uv - p] - 2q = 0$$

Potremmo imporre delle condizioni (1 condizione)
e u e v

Impongo $uv = p$

$$\begin{cases} u \cdot v = p \\ u^3 + v^3 = 2q \end{cases}$$

$\leadsto$

$$\begin{cases} u^3 v^3 = p^3 \\ u^3 + v^3 = 2q \end{cases}$$

$$u^6 - 2qu^3 + p^3 = 0$$

$$v^6 - 2qv^3 + p^3 = 0$$

$\Rightarrow$

$$u_{1,2}^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$$

$$v_{1,2}^3 = q \pm \sqrt{q^2 - p^3}$$

$$z = \sqrt[3]{q + \sqrt{q^2 - p^3}} + \sqrt[3]{q - \sqrt{q^2 - p^3}}$$

Abbiamo u_1, u_2, u_3 radici cubiche di $q + \sqrt{q^2 - p^3}$
 v_1, v_2, v_3 " " " $q - \sqrt{q^2 - p^3}$

Donque abbiamo 9 soluzioni

$$z_1 = u_1 + v_1$$

$$z_4 = u_2 + v_1$$

$$z_7 = u_3 + v_1$$

$$z_2 = u_1 + v_2$$

$$z_5 = u_2 + v_2$$

$$z_8 = u_3 + v_2$$

$$z_3 = u_1 + v_3$$

$$z_6 = u_2 + v_3$$

$$z_9 = u_3 + v_3$$

ed hanno origine dal paraggeio

3

$$u \cdot v = p \rightarrow u^3 v^3 = p^3$$

Di queste 9 radici ne restano solo 3
accettabili in quanto u_i, v_i dobbiamo
soddisfare

$$u_i \cdot v_i = p$$

$$x^3 - 15x - 4 = 0$$

$$\begin{array}{l} -15 = -3p \\ -4 = -2q \end{array} \quad \left| \begin{array}{l} p=5 \\ q=2 \end{array} \right.$$

$$\begin{aligned} z &= \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{4 - 125}} + \sqrt[3]{2 \pm \sqrt{4 - 125}} \\ &= \sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 \pm 11\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Devo provare, come fece Bombelli, a introdurre $i = \sqrt{-1}$
e cercare $a + ib$: $(a + ib)^3 = a^3 + 3ia^2b - 3ab^2 + b^3 = 2 + 11i$
ovvero $\begin{cases} a(a^2 - 3b^2) = 2 \\ b(3a^2 + b^2) = -11 \end{cases}$

ma

$$(2 + i)^3 = 8 + 12i - 6 - i = 2 + 11i \quad (2 - i)^3 = 2 - 11i$$

$$u_1 = 2 + i = (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \sqrt{5}$$

$$u_2 = \left[\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \cdot \sqrt{5}$$

$$u_3 = \left[\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \cdot \sqrt{5}$$

$$v_1 = \left[\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} - \theta\right) \right] \sqrt{5}$$

$$v_2 = \left[\cos\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) + i \sin\left(\frac{4\pi}{3} - \theta\right) \right] \sqrt{5}$$

$$v_3 = \left[\cos(2\pi - \theta) + i \sin(2\pi - \theta) \right] \sqrt{5} \\ = 2 - i$$

///

$$u_1 = 2 + i = (\cos \theta + i \sin \theta) \cdot \sqrt{5}$$

$$u_2 = \left[\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \cdot \sqrt{5}$$

$$u_3 = \left[\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) + i \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \cdot \sqrt{5}$$

$$v_1 = \left[\cos\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\theta - \frac{2\pi}{3}\right) \right] \sqrt{5}$$

$$v_2 = \left[\cos\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) - i \sin\left(\theta - \frac{4\pi}{3}\right) \right] \sqrt{5}$$

$$v_3 = \left[\cos(\theta) - i \sin(\theta) \right] \sqrt{5} \\ = 2 - i$$

\\

$$v_1 = \left[\cos\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) - i \sin\left(\theta + \frac{4\pi}{3}\right) \right] \sqrt{5}$$

$$v_2 = \left[\cos\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) - i \sin\left(\theta + \frac{2\pi}{3}\right) \right] \sqrt{5}$$

$$v_3 = (\cos \theta - i \sin \theta) \sqrt{5}$$

$$u_1 + \sqrt{3} = 2 + i + 2 - i = 4$$

4

$$\begin{aligned} u_2 + \sqrt{3} &= 2\sqrt{5} \cos\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) = 2\sqrt{5} \left(\cos\theta \cos\frac{2}{3}\pi - \sin\theta \sin\frac{2}{3}\pi\right) \\ &= 2\sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \\ &= -2 - \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_3 + \sqrt{3} &= 2\sqrt{5} \cos\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) = 2\sqrt{5} \left(\cos\theta \cos\frac{4}{3}\pi - \sin\theta \sin\frac{4}{3}\pi\right) \\ &= 2\sqrt{5} \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = \\ &= -2 + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Enfin, $z=4$ é solução: $4^3 - 15 \cdot 4 - 4 = 0$ ✓

$$X^3 - 15X - 4 = 0 \quad (\text{com } x=4 \quad 64 - 15 \cdot 4 - 4 = 0)$$

$$X^3 - 15X - 4 = (X-4)(X^2 + 4X + 1)$$

$$\stackrel{!}{=} (X-4)(X+2-\sqrt{3})(X+2+\sqrt{3}) = 0$$

o dunque ritrovo

$$X_1 = 4$$

$$X_2 = -2 - \sqrt{3}$$

$$X_3 = -2 + \sqrt{3}$$

✓

FUNZIONI UNIFORMEMENTE CONTINUE

5

Def: $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in A$ f continua in x_0

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0: \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta$$

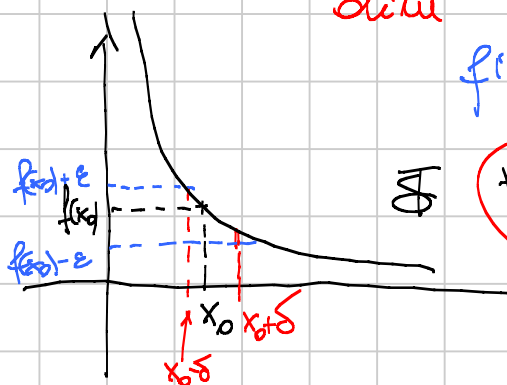
$$\Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

Esempio Verificare che $f = 1/x$ è continua $\forall x_0 > 0$ (e $\forall x_0 < 0$)

dim

fisso ε , debbo trovare $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)!!$



$$\exists \forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon, x_0) > 0: x > 0 \quad x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$$

$$\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

Eventualmente prendendo $0 < \delta < x_0$, posso supporre che $x_0 - \delta > 0$ e la ten diventa

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) \in]0, x_0[: |x - x_0| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \frac{|x - x_0|}{|x \cdot x_0|} = \frac{|x - x_0|}{x \cdot x_0} < \frac{\delta}{x \cdot x_0} < \frac{\delta}{(x_0 - \delta) \cdot x_0}$$

$\uparrow$ $x > 0$
 $\uparrow$ $x_0 > 0$
 $\uparrow$ $|x - x_0| < \delta$
 $\uparrow$ $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$

Quindi, se $x_0 - \delta > 0$ e $|x - x_0| < \delta$ allora

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \frac{\delta}{(x_0 - \delta) \cdot x_0} = \varepsilon$$

$$\text{ricavo } \delta = \delta(\varepsilon, x_0)$$

$$\delta = \varepsilon \cdot x_0^2 - \varepsilon \delta x_0$$

6

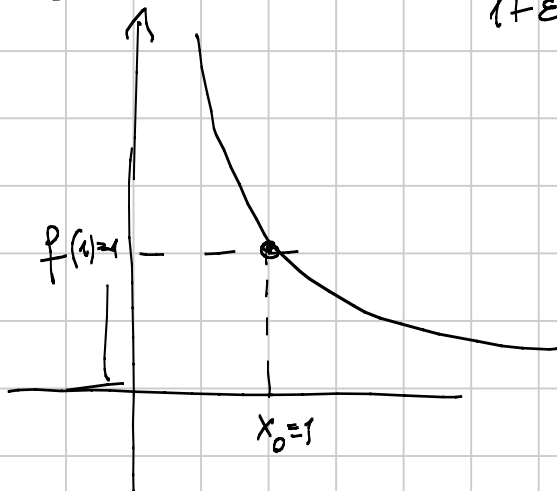
$$\delta(1 + \varepsilon x_0) = \varepsilon x_0^2$$

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{\varepsilon x_0^2}{1 + \varepsilon x_0}$$

limo
 $\varepsilon = 1 \quad \delta(1, x_0) = \frac{x_0^2}{1 + x_0} \xrightarrow{x_0 \rightarrow +\infty} +\infty$

$$\xrightarrow{x_0 \rightarrow 0} 0$$

$x_0 = 1 \quad \delta(\varepsilon, 1) = \frac{\varepsilon}{1 + \varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$



$$\xrightarrow{\varepsilon \rightarrow \infty} 1 \quad \text{poco interessante}$$

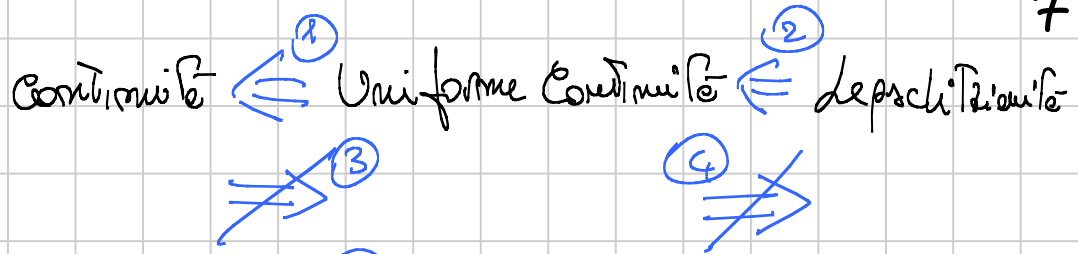
Def (Lipschitziana) (concetto Globale)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice L -lipschitziana su A
 se $\exists L > 0 \quad |f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in A$

Def (Uniforme Continuità) (concetto Globale)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ si dice Uniformemente Continua su A
 se $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0: \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

non dipende
da x_0 !!!!



Teorema Heine-Weierstrass
quando $A = [a, b]$

Teorema (1) $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua
allora f   continua $\forall x_0 \in A$
dim

$$(\forall \epsilon) \quad \forall \delta > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$\Downarrow$
fissato $x_0 \in A$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : \forall x \in A \quad y = x_0 \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$$

Teorema (2) (Lipschitz. $\Rightarrow$ Unif. cont.)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ L -Lipschitziana su A

allora f   unif. continua su A (con $\delta = \epsilon/L$)
dim

$$\rightarrow \exists: \forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(\epsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

$$\text{ma per ipotesi} \quad |f(x) - f(y)| \leq L |x - y| \quad \forall x, y \in A$$

$$\text{da cui se } |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < L \cdot \delta$$

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta = \epsilon/L > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \epsilon$$

Esempio (3) ($f = x^2$   continuo ma non U.c. su $[0, +\infty)$)

Dato $f = x^2$ bisogna provare che f
Non   uniformemente continua su $[0, +\infty)$

(che $f = x^2$ sia continua su $\mathbb{R}$ lo sappiamo già)
dim 8

Voglio provare che
non $(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \geq 0 \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta > 0 : (|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |x_\delta^2 - y_\delta^2| \geq \varepsilon)$$

$$\varepsilon = 1 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta > 0 : (|x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |x_\delta^2 - y_\delta^2| \geq 1)$$

$$(x_\delta^2 - y_\delta^2) = (y_\delta + \frac{\delta}{2})^2 - y_\delta^2 = \frac{\delta^2}{4} + \delta y_\delta \geq \frac{\delta \cdot y_\delta}{1}$$

quindi

$$\varepsilon = 1 \quad \forall \delta > 0 \exists y_\delta > \frac{1}{\delta}, x_\delta = y_\delta + \frac{\delta}{2} :$$

$$(|x_\delta - y_\delta| = \frac{\delta}{2} < \delta \text{ e } |x_\delta^2 - y_\delta^2| \geq 1)$$

questo mi dice che $x^2 = f(x)$ non è u.c.
su $(0, +\infty)$ 1111

Oss: So però, dallo stesso precedente, $y_\delta > \frac{1}{\delta}$.

Questo mi dice che

- i) se l'intervallo non è illimitato, la
dim di prima non funziona
- ii) forse, se l'intervallo è limitato,
e $f = x^2$ è unif continua

L'esempio (4) mi serve come contro

Teorema (Heine Cantor)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continuo (su $[a, b]$ chiuso e limitato)

$\Rightarrow f$ è uniformemente continua su $[a, b]$

dim

Assumendo f non è u.c. su $[a, b]$, cioè

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x_\delta, y_\delta \in [a, b] : |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$$

$$\Downarrow \delta = \frac{1}{n}$$

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta = \frac{1}{n} \exists x_n, y_n \in [a, b] : y_n - \frac{1}{n} < x_n < y_n + \frac{1}{n} \quad (*)$$

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

$$\{y_n\} \subseteq [a, b] \xRightarrow{\text{B.W.}} \exists \{y_{k_m}\}_m \quad y_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \bar{y} \in [a, b] \quad (**)$$

sottosequenza convergente

$$\Rightarrow \begin{matrix} (*) \\ + \\ (**) \end{matrix} \begin{cases} y_{k_m} - \frac{1}{k_m} < x_{k_m} < y_{k_m} + \frac{1}{k_m} \quad \forall m \in \mathbb{N} \\ y_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \bar{y} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \bar{y}$$

(Cordami)

$$\Rightarrow \lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})| = |f(\bar{y}) - f(\bar{y})| = 0$$

(continuità di f in $\bar{y}$)

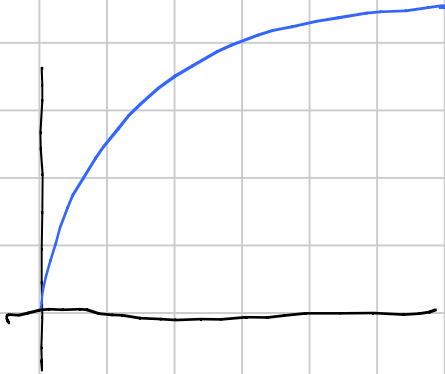
Assumendo $(|f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})| \geq \varepsilon > 0 !!)$

$\Downarrow$

Continuos opoio (f) (≠ u.c. ma ≠ non Lipschitz) 10

$f = \sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[0,1]$
ma è Lipschitziana su $[0,1]$
dici

$f = \sqrt{x}$ è continua su $[0,1]$ $\Rightarrow$ $f = \sqrt{x}$ è u.c. su $[0,1]$
(c.d.) (u.c.)



non $(\exists L > 0 : |\sqrt{x} - \sqrt{y}| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in [0,1])$

non $(\exists L > 0 : \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} \leq L \quad \forall x, y \in [0,1] \quad x \neq y)$

non $(\frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} < +\infty \quad \forall x, y \in [0,1] \quad x \neq y)$

$\sup_{\substack{x, y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{|\sqrt{x} - \sqrt{y}|}{|x - y|} = +\infty$

$$x - y = (\sqrt{x} - \sqrt{y})(\sqrt{x} + \sqrt{y})$$

$\sup_{\substack{x, y \in [0,1] \\ x \neq y}} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{y}} = +\infty$

ma questo è vero: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x} + \sqrt{2x}} = +\infty$

Esercizio $f = \frac{1}{x}$ su $[0,1]$

Non è u.c.

Non è Lip.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{\sqrt{2n}}}$$