

1 Introduzione storica a $\mathbb{C}$

Falso storico: qualcuno si vuole risolvere $X^2 = -1$!

Nel 1500 si cercavano le soluzioni reali e positive delle eq., quindi $X^2 + 1 = 0$ non era interessante (per loro!)

Interessante risolvere le eq. algebriche di 3° grado

$$f = X^3 + pX + q = 0$$

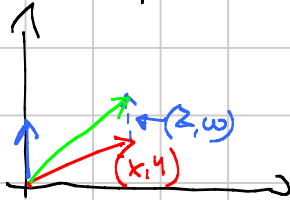
che, per ragioni intuitive (per $x \rightarrow \pm\infty$ $f = \pm\infty$)

e quindi necessariamente Tagliamo l'asse x)

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

Vogliamo introdurre "·" e "+"

"+" è semplice $(x, y) + (z, w) = (x+z, y+w)$



è commutativa

è associativa

esiste $(0, 0)$ elemento neutro

$\forall (a, b) \exists (-a, -b)$ opposto t.c. $(a, b) + (-a, -b) = (0, 0)$

"·"

$$(a, b) \cdot (c, d) := (ac - bd, ad + bc)$$

è associativa (verificare)

è commutativa (" ")

esiste $(1, 0)$ elemento neutro $(a, b) \cdot (1, 0) = (a, b)$

$\forall (a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \exists (c, d) : (a, b) \cdot (c, d) = (1, 0)$

$$(c,d) = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, -\frac{b}{a^2+b^2} \right)$$

2

Valle la proprietà distributiva

OSS: il vettore $(0,1)$: $(0,1) \cdot (0,1) = (-1,0)$

OSS: $(a,b) = (a,0) + (0,b) = a \underbrace{(1,0)}_{\uparrow} + b \underbrace{(0,1)}_{\uparrow}$ Vettori di base

OSS: Non è molto chiaro perché il prodotto sia così definito; verrà chiarito dalla forma polare
 $(1,0) \rightarrow 1$ (unità in $\mathbb{R}$) $(0,1) \rightarrow i$ t.c. $(0,1)^2 = (-1,0)$ ovvero $i^2 = -1$

$a+ib \equiv$ forma algebrica di un numero complesso
 $z = (a,b)$

$$(a+ib) + (c+id) = a+c + i(b+d)$$

$$(a,b)(c,d) = (ac-bd, ad+bc)$$

$$= (a+ib)(c+id)$$

$$= ac + iad + ibc + i^2 bd$$

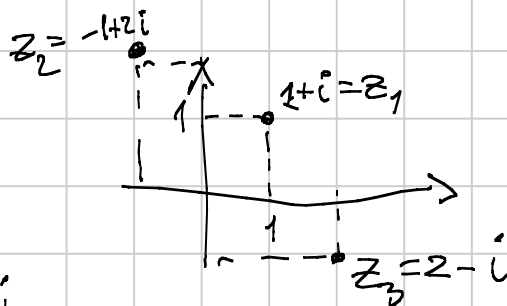
$$= ac - bd + i(ad+bc)$$

Esempi

$$z_1 = 1+i$$

$$z_2 = -1+2i$$

$$z_3 = 2-i$$



Esempio risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione

$$z + i = -3 + iz$$

dim

$z = x + iy$ con x e y incognite, sostituendo

$$x + iy + i = -3 + i(x + iy)$$

$$x + iy + i + 3 - ix - i^2 y = 0$$

$$-i^2 = -(-1) = 1$$

$$(*) (x + 3 + y) + i(y + 1 - x) = 0$$

un vettore è nullo quando entrambe le componenti sono nulle

$$(*) \Rightarrow \begin{cases} x + 3 + y = 0 \\ y + 1 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + 2y = 0 \\ / \end{cases} \begin{cases} y = -2 \\ x = -1 \end{cases}$$

la soluzione è $z = -1 - 2i$

per verifica sostituisco nell'eq di partenza

$$(-1 - 2i) + i = -3 + i(-1 - 2i)$$

$$-1 - i \stackrel{?}{=} -3 - i + 2 = -1 - i \quad \checkmark \quad \text{OK}$$

Def Dato $z \in \mathbb{C}$ $z = x + iy$ diciamo
 $x = \operatorname{Re} z \equiv$ parte reale di z

$y = \operatorname{Im} z \equiv$ "immaginaria di z

Esempio $z_1 = -3 + 4i$ $\operatorname{Re} z = -3$ $\operatorname{Im} z = 4$

Domanda : $\frac{1}{3-i} \in \mathbb{C}$? Sì, però non è
 nelle forme $a + ib$

$$\text{ma } \frac{1}{3-i} \cdot \frac{3+i}{3+i} = \frac{3+i}{9-i^2} = \frac{3+i}{9+1} = \frac{3}{10} + i \frac{1}{10}$$

e dunque $\operatorname{Re}\left(\frac{1}{3-i}\right) = \frac{3}{10}$ $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{3-i}\right) = \frac{1}{10}$ 4

Esempio

Risolvere in $\mathbb{C}$ l'equazione $z^2 + z + 1 = 0$
dum

$z = x + iy$ e l'eq. diventa

$$(x^2 + i^2 y^2 + 2ixy) + (x + iy) + 1 = 0 \quad i^2 = -1$$

$$x^2 - y^2 + x + 1 + i(2xy + y) = 0$$

questa eq. equivale al sistema REALE

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ y(2x + 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x^2 - y^2 + x + 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^2 + x + 1 = 0} \\ \cancel{y = 0} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \frac{1}{4} - y^2 - \frac{1}{2} + 1 = 0 \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

*NON
ha soluzioni
Reali*

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = \frac{3}{4} \\ x = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} y_1 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ x_1 = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \quad \text{W}$$

Problema: ordinamento in $\mathbb{C}$

Possiamo introdurre un ordine totale in $\mathbb{C}$? $\mathbb{R}^2$

$$z_1 = a + ib \quad z_2 = c + id$$

per esempio ordine lexicografico

$$z_1 \leq z_2 \quad \text{ma} \quad a \leq c \quad \text{o} \quad \begin{cases} a=c \\ b \leq d \end{cases} \quad 5$$

Ordini ordine in $\mathbb{R}$

$$a \leq b \Rightarrow a+c \leq b+c$$

$$a \leq b \quad c > 0 \Rightarrow a \cdot c \leq b \cdot c$$

Forse che
l'ordine lemmografico
dove "compatibile"
con le operazioni
in $\mathbb{C}$

Ma questo non funziona (il problema è i !)

$$i \leq 10i \quad (\text{xil lemmografico})$$

$$0 < i \quad (")$$

$$\Rightarrow i^2 \leq 10i^2$$

$$-1 \leq -10$$

Assurdo

C'è un teorema che garantisce
la non esistenza di ordini totali in $\mathbb{C}$
compatibili con le operazioni

Def (coniugato di z)

Dato $z \in \mathbb{C}$, $z = a+ib$, dico "coniugato di z "

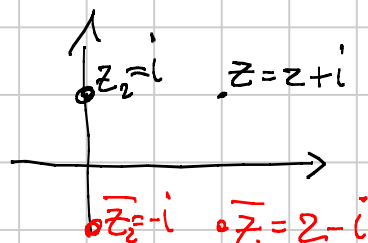
il numero complesso $\bar{z} = a-ib$

ovvero il n.ro tale che

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z}$$

$$\operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z}$$

Esempio



$$\text{OSS } z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow z = \bar{z}$$

6

$$\text{OSS } \mathbb{R} \xleftrightarrow{\text{genz. biuniv.}} \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{C}$$

$\mathbb{R}$ è un sottoinsieme di $\mathbb{C}$

Proprietà Coniugato

$$1) z \in \mathbb{R} \text{ se } \bar{z} = z$$

$$2) \overline{z+w} = \bar{z} + \bar{w}$$

$$3) \overline{z \cdot w} = \bar{z} \cdot \bar{w}$$

$$(a+ib) \cdot (c+id) = (ac-bd) + i(ad+bc) =$$

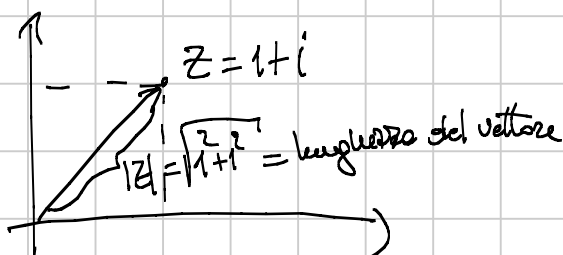
$$= ac-bd - i(ad+bc)$$

$$(a-ib)(c-id) = ac-bd - i(ad+bc) \quad \checkmark$$

$$4) \overline{(\bar{z})} = z \quad (\text{verifica banale})$$

Def dato $z \in \mathbb{C}$, definiamo $|z|$ il "modulo di z "

$$\text{se } |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \quad (= \sqrt{a^2+b^2} \text{ se } z = a+ib)$$



$$\text{OSS } |z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$$

$$\text{e infatti } (a+ib)(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2 + b^2$$

Oss $\frac{1}{3-i} \cdot \frac{3-i}{3-i} = \frac{3+i}{|3-i|^2} = \frac{3+i}{\sqrt{9+1}} = \frac{3}{10} + i \frac{1}{10}$

Oss Quale $z = a \in \mathbb{R}$ $|z|$ è il modulo
introdotta in $\mathbb{R}$, cioè $|z| = \max\{a, -a\}$

$$= \begin{cases} a & a > 0 \\ -a & a \leq 0 \end{cases}$$

Proprietà di 1.1

1) $0 \leq |z|$ (ovvio)

2) $|z| = |\bar{z}| = |-z|$

3) $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$

4) $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$

5) $|z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$

6) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

7) $|z+w| \leq |z| + |w|$

2) $z = a + ib$ $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$-z = -a - ib$ $|-z| = \sqrt{(-a)^2 + (-b)^2} = |z|$

$\bar{z} = a - ib$ $|\bar{z}| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = |z|$

3) $z = a + ib$ $\operatorname{Re} z = a$ $\operatorname{Im} z = b$

4) $|\operatorname{Re} z| = |a| = \sqrt{a^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$

$|\operatorname{Im} z| = |b| = \sqrt{b^2} \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |z|$



$\sqrt{a^2 + b^2} \leq |a| + |b|$

$$a^2 + b^2 \leq a^2 + b^2 + 2|a \cdot b| \quad \underline{\underline{\text{Verke}}}$$

6) $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$ 8

$$|(a+ib)(c+id)| = |ac - bd + i(ad+bc)|$$

$$= \sqrt{(a^2c^2 + b^2d^2 - 2\cancel{abcd}) + (a^2d^2 + b^2c^2 + 2\cancel{abcd})}$$

$$= \sqrt{a^2(c^2+d^2) + b^2(d^2+c^2)}$$

$$= \sqrt{a^2+b^2} \sqrt{c^2+d^2} = |z| \cdot |w| \quad \checkmark$$

7) $|z+w| \leq |z| + |w|$

$$|z+w|^2 \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z| \cdot |w|$$

$$(z+w)(\bar{z}+\bar{w})$$

$$\cancel{z \cdot \bar{z}} + \cancel{z \cdot \bar{w}} + \cancel{w \cdot \bar{z}} + \cancel{w \cdot \bar{w}} \leq \cancel{|z|^2} + \cancel{|w|^2} + 2|z| \cdot |w|$$

$$z \cdot \bar{w} + \bar{z} \cdot w \leq 2|z| \cdot |w|$$

$$\cancel{2} \operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) \leq \cancel{2} |z| \cdot |w|$$

$$z = a+ib \quad w = c+id \quad \bar{w} = c-id$$

$$\operatorname{Re}(z \cdot \bar{w}) = \operatorname{Re}((a+ib)(c-id)) = ac + bd$$

$$|z| \cdot |w| = \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \geq ac + bd$$

$$\cancel{a^2c^2} + \cancel{b^2d^2} + a^2d^2 + b^2c^2 \geq \cancel{a^2c^2} + \cancel{b^2d^2} + 2abcd$$

$$(ad-bc)^2 \geq 0 \quad \text{!} \quad \text{w}$$

Esempio

9

Determinare tutte le soluzioni di

$$P(z) = z^2 + 4iz^2 - iz - 4 = 0$$

dici

$f(z)$ NON è un polinomio!

$z = x + iy$ e sostituisco

$$(x^2 - y^2 + 2ixy) + 4(x^2 + y^2) - i(x + iy) - 4 = 0$$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 + 4(x^2 + y^2) + y - 4 = 0 \\ 2xy - x = x(2y - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2xy - x = x(2y - 1) = 0 \\ \Downarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 0 \\ 3y^2 + y - 4 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 + 3 \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{2} - 4 = 0 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+48}}{6} \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5x^2 = 4 - \frac{5}{4} = \frac{11}{4} \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$z_1 = -\frac{4}{3}i$$

$$z_3 = \sqrt{\frac{11}{20}} + \frac{i}{2}$$

$$z_2 = +i$$

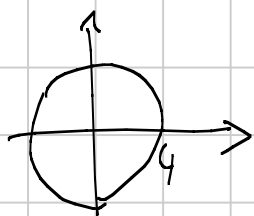
$$z_4 = -\sqrt{\frac{11}{20}} + \frac{i}{2}$$

Esempio

$$|z| = 4$$

dici

$\{|z| = 4\}$ è una circonferenza di centro $(0,0)$
e raggio 4



$$\sqrt{x^2 + y^2} = 4$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

Teorema (Fondamentale dell'Algebra)

Dato $P_n = Q_n z^n + Q_{n-1} z^{n-1} + \dots + Q_1 z + Q_0$ $Q_i \in \mathbb{C}$

allora $P_n(z) = 0$ ammette almeno una soluzione (una radice!)

Corollario

$P_n(z) = 0$ ammette n soluzioni (contate con le dovute molteplicità)

Esempio

1) $(z-i)(z+1)(z-3) = 0$ ha 3 radici
semplici $i, -1, 3$

2) $(z-3)^{100} = 0$ ha 1 radice $z=3$
con molteplicità 100

3) $(z-1)^2 z = 0$ ha $z=1$ radice mult. 2
 $z=0$ " " 1

Oss: Quando si discute la natura delle radici di
 $a x^2 + b x + c = 0$, $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$
si osserva che le radici x_1, x_2 possono
essere

reali distinte

reali coincidenti

complesse coniugate

Esempio trovare le radici di

$$x^2 - 2ix - 2 = 0$$

diciam

con la formula

$$x_{1,2} = \frac{2i \pm \sqrt{(-2i)^2 + 8}}{2} = \frac{2i \pm \sqrt{4}}{2} = \begin{matrix} i-1 \\ i+1 \end{matrix}$$

e queste radici NON SONO CONIUGATE TRA LORO

Domanda: dato un polinomio $P(z)$ di grado n , che relazione c'è tra "avere i coefficienti reali"

$$\text{e} \\ "P(z)=0 \Rightarrow P(\bar{z})=0" \quad ?$$

Teorema dato $P_n(z)$ polinomio di grado n a coefficienti REALI

$$\text{se } P(z)=0 \text{ allora } P(\bar{z})=0$$

(ovvero se ammette z come radice allora anche $\bar{z}$ lo è!)

diciam

$$P(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0 = 0$$

$$\Downarrow \text{ (se un numero } \bar{z} \text{ è nullo, anche il coniugato lo è!)}$$

$$\overline{P(z)} = \overline{a_n z^n + \dots + a_1 z + a_0} = 0$$

$$\Downarrow \text{ (coniugato di una somma = somma dei coniugati)}$$

$$\overline{a_n} \overline{(z^n)} + \dots + \overline{a_1} \cdot \bar{z} + \overline{a_0} = 0$$

$$\Downarrow (a_i \in \mathbb{R} \Leftrightarrow a_i = \overline{a_i} \quad i=0, \dots, n)$$

$$a_n \overline{z^n} + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0$$

$$\Downarrow \overline{(z^k)} = (\bar{z})^k \quad k=0, \dots, n$$

$$P(\bar{z}) = a_n (\bar{z})^n + \dots + a_1 \bar{z} + a_0 = 0 \quad \text{che è la tesi} \quad \square$$

QSS: Dal Teorema precedente segue che

12

- 1) i polinomi di 1° grado a coeff. reali
ammettono una ed una sola radice reale
- 2) i polinomi di 2° grado a coeff. reali
ammettono almeno 1 radice reale
- 3) i polinomi di grado n° a coeff. reali
ammettono almeno 1 radice reale