Esercizio Determinare il polinomio di ordine 5 della funzione $f(x) = \cos(\sin(x))$ centrato in 0

dim

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{5!} + o(x^5)$$

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2} + \frac{y^4}{4!} + o(x^5)$$

$$\Rightarrow \cos(\operatorname{sen}(x)) = 1 - \frac{1}{2}\left(x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)^2 + \frac{1}{24}\left(x + o(x^2)\right)^4 + o\left(\left(x + o(x^2)\right)^5\right)$$

$$\cos(\operatorname{sen} x) = 1 - \frac{1}{2}\left(x^2 - \frac{1}{3}x^4 + o(x^5)\right) + \frac{1}{24}x^4$$

$$= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5)$$

(Calcolare, data $f = \cos(\operatorname{sen} x)$, le derivate $f'(0)$ $f''(0)$ $f'''(0)$ $f^{IV}(0)$)

Esercizio Calcolare lo sviluppo Taylor centrato in $x_0 = 0$ di ordine 4 di

$$f(x) = 3e^{x^2} - 2\log(1+x^2) - \frac{x}{1-2x} - 3\cos x + \operatorname{sen} x$$

dim

$$e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2} + o(y^2) \Rightarrow e^{x^2} = 1 + x^2 + \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\log(1+y) = y - \frac{y^2}{2} + o(y^2) \Rightarrow \log(1+x^2) = x^2 - \frac{x^4}{2} + o(x^4)$$

$$\frac{1}{1-y} = 1 + y + y^2 + y^3 + y^4 + o(y^4) \Rightarrow \frac{x}{1-2x} = x\left(1 + 2x + 4x^2 + 8x^3 + 16x^4 + o(x^4)\right)$$

$$\overset{!}{=} x + 2x^2 + 4x^3 + 8x^4 + o(x^4)$$

$$\Rightarrow f = \cancel{3} + 3x^2 + \frac{3}{2}x^4 - 2x^2 + x^4 - \cancel{x} - 2x^2 - 4x^3 - 8x^4 - 3\left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}\right) + \cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$$

$$\overset{!}{=} x^2\left(3 - 4 + \frac{3}{2}\right) + x^3\left(-4 - \frac{1}{6}\right) + x^4\left(\frac{3}{2} + 1 - 8 - \frac{1}{8}\right) + o(x^4)$$

$$= \frac{x^2}{2} - \frac{25}{6}x^3 - \frac{45}{8}x^4 + o(x^4)$$

Problema quantitativo

Calcolare approssimativamente $\sqrt{65}$.

$$\sqrt{64+1} = 8\sqrt{1+\frac{1}{64}} = 8\cdot\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/2}$$

$$= 8\cdot\left(1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{64}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{64}\right)^2\right)+\boxed{?}$$

OSS

Devo quantificare l'errore. Il resto di Peano è della forma $o(x^n;0)$ (o + in generale $o((x-x_0)^n;x_0)$) e l'unica cosa che io so è

$$\lim_{x\to x_0}\frac{o((x-x_0)^n;x_0)}{(x-x_0)^n}=0$$

Teorema (Formula Taylor con Resto di Lagrange)

$f:]a,b[\to\mathbb{R}$, $x_0\in]a,b[$

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

f sia derivabile $n+1$ volte in $]a,b[$

Allora $\exists z\in]x_0,x[$ $(z\in]x,x_0[)$: $f(x)-P_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

Oss : 1) $\dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}=o((x-x_0)^n;x_0)$ (verifica immediata!)

quindi la Tesi della formula con resto di Peano vale ancora (ovvio, le ipotesi son + forti)

2) Nella dimostrazione non potrò usare l'Hopital, utilizzo il Teorema di Cauchy (che era servito a provare il Teorema dell'Hopital)

dim

Devo provare che $\dfrac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \dfrac{f^{(n+1)}(z)}{(n+1)!}\cancel{(x-x_0)^{n+1}}$ $\quad x\neq x_0$

thm. Cauchy

$$\frac{f(x)-P_n(x)}{(x-x_0)^{n+1}} = \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x)-g(x_0)}{h(x)-h(x_0)} =$$

$g(x_0)=f(x_0)-P_n(x_0)=0$

$g'(x_0)=f'(x_0)-P'_n(x_0)=0$

"

$g^{(n)}(x_0)=f^{(n)}(x_0)-P^{(n)}_n(x_0)=0$

$\exists z_1$ compreso tra x e x_0 $\displaystyle = \frac{g'(z_1)}{h'(z_1)} = \frac{g'(z_1)-g'(x_0)}{h'(z_1)-h'(x_0)} =$

$\exists z_2$ compreso tra z_1 e x_0 $\displaystyle = \frac{g''(z_2)}{h''(z_2)} = \frac{g''(z_2)-g''(x_0)}{h''(z_2)-h''(x_0)} =$

dopo n applicazioni di Cauchy

$$= \frac{g^{(n)}(z_n)}{h^{(n)}(z_n)} = \frac{g^{(n)}(z_n)-g^{(n)}(x_0)}{h^{(n)}(z_n)-h^{(n)}(x_0)} =$$

$\exists z_{n+1}$ compreso tra z_n e x_0 $\displaystyle = \frac{g^{(n+1)}(z_{n+1})}{h^{(n+1)}(z_{n+1})} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})-P_n^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!} = \frac{f^{(n+1)}(z_{n+1})}{(n+1)!}$

∎

Ritorno al calcolo di $\sqrt{65}$

$$(1+x)^{1/2} = 1 + \frac{1}{2}\cdot x + \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2}x^2 + \frac{f^{(3)}(z)}{3!}x^3$$

$$\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/2} = 1 + \frac{1}{128} - \frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^2 + \boxed{\frac{f^{(3)}(z)}{6}\cdot\left(\frac{1}{64}\right)^3}$$

$$f(x) = e^{\frac{1}{2}\log(1+x)}$$

$$f' = (1+x)^{1/2}\cdot\frac{1}{2(1+x)} = \frac{1}{2(1+x)^{1/2}} = \frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}$$

$$f'' = -\frac{1}{4}(1+x)^{-3/2}$$

$$f''' = + \frac{3}{8}(1+x)^{-5/2} = \frac{3}{8} \cdot \frac{1}{(1+x)^{5/2}}$$

Noi sappiamo che $z \in]0, 1/64[$

$$\sup f'''(]0, 1/64[) = \frac{3}{8} \cdot \sup_{0 \leq x < 1/64} \frac{1}{(1+x)^{5/2}} = \frac{3}{8}$$

$$\left| \text{Resto di Lagrange} \right| = \left| \frac{f^{(3)}(z)}{6} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^3 \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^3 \cdot \sup f^{(3)}(]0, 1/64[) = \frac{3}{48} \cdot \left(\frac{1}{64}\right)^3$$

Dunque l'errore commesso sostituendo a $\left(1+\frac{1}{64}\right)^{1/2}$ il valore $1 + \frac{1}{128} - \frac{1}{8}\left(\frac{1}{64}\right)^2$ è inferiore in valore assoluto a $\frac{\cancel{3}}{48}\left(\frac{1}{64}\right)^3$

Diamo un nome alla relazione tra $\operatorname{sen} x$ e x quando $x \to 0$

Def (Equivalenza Asintotica)

Date $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ $f,g = o(1;a)$ (oppure

$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ $\lim_{x\to a} g(x) = \infty$)

diciamo che "f asintoticamente equivalente a g per $x \to a$" e scriviamo

$$f \sim g \text{ per } x \to a$$

se $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Esempi

$\operatorname{sen} x \sim x$ per $x \to 0$: infatti $\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$1-\cos x \sim x^2$ per $x \to 0$: " $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

$x + \sqrt{x} \sim x$ per $x \to +\infty$

Dato un infinitesimo per $x \to 0$, si può avere

$\operatorname{sen} x = \boxed{x} + o(x^2)$

$1-\cos x = \boxed{\frac{x^2}{2}} + o(x^3)$

Def (Ordine e Parte Principale)

$f : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a per A $f = o(1;x_0)$

Se esistono $a, \alpha \in \mathbb{R}$ t.c.

$$f(x) = a \cdot |x-x_0|^\alpha + o(|x-x_0|^\alpha; x_0)$$

$\alpha \equiv$ ordine dell'infinitesimo f per $x \to x_0$

$a \cdot |x-x_0|^\alpha \equiv$ parte principale dell'infinitesimo f $x \to x_0$

Esempio

$\operatorname{sen} x$, per $x \to 0$, ha ordine$=1$ e p.p. $\equiv x$

$1-\cos x$, " " , " " $=2$ " p.p. $\equiv \frac{x^2}{2}$

Problema: con quale velocità $\frac{1}{\log x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0$?

$$\frac{1}{\log x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \frac{1}{-\infty} = 0^-$$

Esiste $\alpha > 0$: $\frac{x^\alpha}{1/\log x} \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$?

" $\alpha > 0$; $x^\alpha \log x \xrightarrow[x\to 0^+]{} \ell \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$

Purtroppo $x^\alpha \log x \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^-$ $\forall \alpha > 0$

Dunque

$$\frac{1}{\log x} << x^\alpha \quad \forall \alpha > 0 \quad \text{per } x \to 0$$

Esercizio

Calcolare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^2} - \cos x - \operatorname{sen} x}{x - \frac{x^\alpha}{3} - \operatorname{sen} x}$$

oltre

Sviluppo al 2° ordine

$$\frac{\cancel{1} + x^2 + o(x^3) - \left(\cancel{1} - \frac{x^2}{2} + o(x^3)\right) - \left(x + o(x^2)\right)}{x - \frac{x^\alpha}{3} - \left(x + o(x^2)\right)} =$$

$$= \frac{-x + \frac{3}{2}x^2 + o(x^2)}{-\frac{x^\alpha}{3} + o(x^2)} = \frac{-x + o(x)}{-\frac{x^\alpha}{3} + o(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{}$$

α

$$\longrightarrow \begin{cases} 0 & \alpha < 1 \\ 3 & \alpha = 1 \\ +\infty & 1 < \alpha \leq 2 \end{cases}$$

Quando $\alpha > 2$, si ottiene

$$\frac{-x + o(x)}{o(x^2)}$$

ma questo tende a ∞ se non posso individuarne il segno

Esercizio

Calcolare $\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3 + x^\alpha}$ al variare di α

dim

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3 + x^\alpha} = \frac{x + o(x^2) - x}{x^3 + x^\alpha} = \frac{o(x^2)}{x^3 + x^\alpha}$$

Se $\alpha \le 2$ allora $\frac{o(x^2)}{x^3 + x^\alpha} = \frac{o(x^2)}{x^\alpha + o(x^\alpha)} =$

$$= \frac{o(x^{2-\alpha})}{1 + o(1)} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$$

Se $\alpha > 2$ allora $\frac{o(x^2)}{x^\alpha + x^3}$ indecidibile

Proviamo a prendere $\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^4)$

$$\frac{\operatorname{sen} x - x}{x^3 + x^\alpha} = \frac{\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4) - \cancel{x}}{x^3 + x^\alpha} =$$

$$= \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^\alpha + x^3} = \begin{cases} 0 & \alpha < 3 \\ -\frac{1}{12} & \alpha = 3 \\ -\frac{1}{6} & \alpha > 3 \end{cases}$$

$\alpha = 3$ $\quad \frac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{2x^3} = -\frac{1}{12} \frac{1 + o(1)}{1} \longrightarrow -\frac{1}{12}$

$\alpha > 3$ $\quad \dfrac{-\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^3 + o(x^3)} = -\dfrac{1}{6}\,\dfrac{1 + o(x)}{1 + o(1)} \to -\dfrac{1}{6}$

$\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\text{Polinomio} + \text{resto}}{\text{Polinomio} + \text{resto}}$

6)Calcolare ordine e parte principale per $x \to 0$ dei seguenti infinitesimi:

c) $f(x) = \cos x - 1 + \operatorname{tg} x$; d) $f(x) = 2x^2 \operatorname{sen}^2 x$; e) $f(x) = \operatorname{sen}(\cos x - 1)$; f) $f(x) = (1+x)^\alpha - 1$;

g) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$; h) $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x + x^2)}{\operatorname{sen}^2 x}$; i) $f(x) = \operatorname{sen}(2x^2)\cdot(\sqrt{1+3x} - 1)$;

8) Calcolare ordine e parte principale per $x \to +\infty$ di: b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x-3}{x}} - 1$; c) $f(x) = \arctan \dfrac{3}{x^2}$

9) Date $f(x) = (x - \operatorname{sen} x)^2$ e $g(x) = x - \log(1+x)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) / g(x)$.

10) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

b) $\displaystyle\lim_{x\to -1} \frac{1-\cos(x+1)}{x+1}\cdot\frac{3(x-1)}{e^{x^2-1}-1}$; c) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x \cdot sen\left(\log\frac{x+1}{x+2}\right)$;

e) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\log(1+x)}{1-\cos x}\right)^{3-x}$; g) $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{senx - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$;

11) Determinare il valore del parametro α in modo che il seguente limite sia un numero finito e calcolarne il valore: $\displaystyle\lim_{x\to 0} x^{-2}\cdot(e^{\alpha x} - e^x - x)$

12) Determinare i valori dei parametri a e b in modo che il $\displaystyle\lim_{x\to 0}(x^{-3}\cdot \operatorname{sen}3x + ax^{-2} + b)$ valga 0.

13) Calcolare, al variare del parametro reale α, i seguenti limiti:

a) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x - e^{senx}}{x^\alpha}$; b) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x^\alpha}{x - senx}\right)$; c) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{|x|^\alpha + x^2}$;

d) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{x - senx}{(1-x)^{-1}\cos x - e^x - \frac{x^\alpha}{3}}$; e) $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{sen(x)^2 - sen^2 x - \frac{x^\alpha}{3}}{(1+x^2)\log(1+x^2) - e^{x^2} + 1}$;