Def $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ R integrabile $a<b$

$$\int_b^a f(x)dx := -\int_a^b f(x)dx$$ Integrale su intervallo orientato

Tutti i risultati precedenti continuano a valere, con le precisazioni seguenti

① $f\le g$ su $[a,b]$ $\Rightarrow$ $\int_a^b f \le \int_a^b g$ & $\int_b^a f \ge \int_b^a g$

Inoltre

② $$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

③ Inoltre il teorema di spezzamento si "amplia" in quanto

$$\int_0^1 f(x)dx = \int_0^{100} f(x)dx + \int_{100}^1 f(x)dx = \int_0^{100} f(x)dx - \int_1^{100} f(x)dx$$

Naturalmente f deve risultare integrabile sull'unione degli intervalli

Teorema FONDAMENTALE del calcolo integrale (I)

$f: I \to \mathbb{R}$ $\boxed{I \text{ intervallo}}$, sia $a \in I$ fissato

definiamo $F(x) \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in I$

$\boxed{f \text{ continua } \forall x \in I}$

$\Rightarrow F(x)$ è una primitiva di $f(x)$ su I

dim

Ts $\forall x_0 \in I$, devo provare che $F'(x_0) = f(x_0)$

Osservo che $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ esiste $\forall x \in I$, in quanto f è continua e dunque integrabile su $[a,x]$ (su $[x,a]$) $\forall x \in I$

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \frac{1}{x-x_0}\left(\int_a^x f(t)\,dt - \int_a^{x_0} f(t)\,dt\right)$$

operazione additività

$$\downarrow$$

$$= \frac{1}{x-x_0}\left(\cancel{\int_a^x f(t)\,dt} - \cancel{\int_a^x f(t)\,dt} - \int_x^{x_0} f(t)\,dt\right) =$$

orientazione $\qquad$ Teorema Media

$$\stackrel{\downarrow}{=} \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^{x} f(t)\,dt \stackrel{\downarrow}{=} f(z) \qquad z \in [x_0, x] \;\; (\text{o } [x, x_0])$$

Passo al limite $\qquad$ confronto var.

$$F'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} = \lim_{x\to x_0} f(z) \stackrel{\downarrow}{=} \lim_{z\to x_0} f(z)$$

$$= f(x_0) \qquad \blacksquare$$

$\uparrow$ f continua in x_0

Teorema fond. Calcolo Integrale (II)

$f: I \to \mathbb{R}$, I intervallo, f continua su I

Sia $G: I \to \mathbb{R}$ una primitiva di f. Fisso $a \in I$

Sia $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad x \in I$

Allora i) $\exists c \in \mathbb{R}$ t.c. $F(x) = G(x) + c \quad x \in I$

ii) $\forall \alpha < \beta \in I \quad \int_\alpha^\beta f(t)\,dt = G(\beta) - G(\alpha)$

dim

i) $\left(F(x) - G(x)\right)' = F'(x) - G'(x) = f(x) - f(x) = 0 \quad \forall x \in I$

G è una primitiva di f su I interv.
+ T.F.C. I

$\Rightarrow \exists c \in \mathbb{R}: F(x) - G(x) = c \quad \forall x \in I$

Corollario thm Lagrange

spezzamento — int. su intervallo orientato

ii) $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = \int_\alpha^a f(t)\,dt + \int_a^\beta f(t)\,dt = \int_a^\beta f(t)\,dt - \int_a^\alpha f(t)\,dt$

$= F(\beta) - F(\alpha) = \left(G(\beta) + \cancel{c}\right) - \left(G(\alpha) + \cancel{c}\right)$

def. di F(x) — per il punto i)

$= G(\beta) - G(\alpha)$ ▯

Oss. Importante

Data $f: I \to \mathbb{R}$ continua, fissato $a \in I$

$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ è una primitiva di f

per esempio $F(x) = \int_0^x e^{t^2}\,dt \quad \forall x \in \mathbb{R}$

è una primitiva di $e^{t^{20}}$

IN GENERALE non è detto che una primitiva si possa esprimere in termini di funzioni elementari

infatti $\int_0^x e^{t^2}dt$ non è esprimibile in termini di funzioni elementari

Anche $f(t)=\begin{cases}\frac{\sin t}{t} & t\neq 0\\ 1 & t=0\end{cases}$

$\to F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ non è esprimibile in termini di f.ni elementari

Esercizio Data $F(x)=\int_3^x \frac{\sin(t)}{t}\,dt$

Calcolare $F'(\pi/2)$

dim

Non posso esprimere $\int \frac{\sin t}{t}$ in termini di funzioni elementari, ma per il Teorema Fond. Calcolo

$$F'(x)=\frac{\sin x}{x} \qquad F'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi} \qquad \square$$

Esercizio Data $F(x)=\int_{x^2}^2 e^{t^2}\,dt$

calcolare $F'(1)$

dim

$$F(x)=-\int_2^{x^2} e^{t^2}\,dt \qquad \cancel{F'(x)=-e^{(x^2)^2}}$$

$$x \xmapsto{\varphi} x^2 \xrightarrow{G} -\int_2^{x^2} e^{t^2}\,dt$$

$$F(x)=G(\varphi(x)) = -\int_2^{\varphi(x)} e^{t^2}\,dt \qquad F'(x) = G'(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)$$

$$G(y) = -\int_2^{y} e^{t^2}\,dt \qquad = \left(-e^{(\varphi(x))^2}\right)\cdot\varphi'(x)$$

$$\varphi(x)=x^2 \qquad = -e^{x^4}\cdot 2x$$

$$F'(1) = -2\cdot e^1 = -2e$$

Problema

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$f\geq 0$

$\int_a^b f(t)\,dt = 0$

$\Rightarrow f(t)=0 \ \forall t\in[a,b]$? <u>NO</u>

Controesempio

$$f(x)=\begin{cases} 1 & x=2 \\ 0 & x\in[0,4]\setminus\{2\}\end{cases}$$

Oss: la funzione del controesempio non è continua in $x=2$

Problema

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$

$f\geq 0$

$\int_a^b f(t)\,dt = 0$

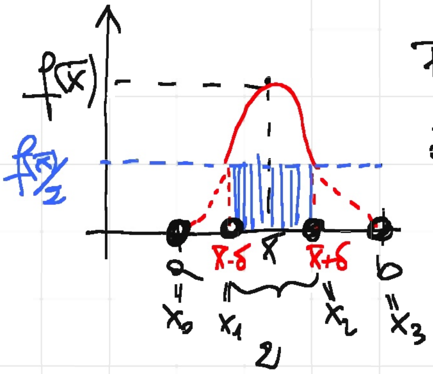
f continua $\forall x\in[a,b]$

$\overset{?}{\Rightarrow} f(t)=0 \ \forall t\in[a,b]$? SI

dim

x essendo $f\not\equiv 0 \Rightarrow \exists\, \bar{x}\in\,]a,b[$ (potrebbe anche essere $a=x_0$ o $b=x_0$)

t.c. $f(\bar{x}) \neq 0$, più precisamente $f(\bar{x}) > 0$



Per il Teorema della permanenza segno $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall x \in \,]\bar{x}-\delta, \bar{x}+\delta[\quad f(x) > \frac{f(\bar{x})}{2}$

$$\mathcal{A} = \{a = x_0 < \bar{x}-\delta = x_1 < \bar{x}+\delta = x_2 < x_3 = b\}$$

$$s(f,\mathcal{A}) = \sum_{k=0}^{2} (x_{k+1}-x_k) \inf f([x_k, x_{k+1}]) = (f \geq 0)$$

$$\geq (x_2 - x_1) \cdot \inf f([x_1, x_2]) \geq (\bar{x}+\delta - \bar{x}+\delta) \cdot \frac{f(\bar{x})}{2}$$

$$= \cancel{2}\delta \cdot \frac{f(\bar{x})}{\cancel{2}} = \delta \cdot f(\bar{x}) > 0$$

$$\Rightarrow s(f) \geq \delta\, f(\bar{x}) > 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \geq f(\bar{x}) \cdot \delta > 0$$

ASSURDO ↯

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

f) $z^2 \cdot \bar{z}^2 + 2\bar{z}^2 + iz^2 + 2i = 0$.

Non posso dire "a priori" quante soluzioni debba l'equazione: non è un polinomio in z a coeff. complessi.

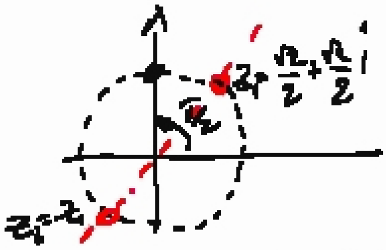
$$|z|^4 + 2\bar{z}^2 + iz^2 + 2i = 0$$

Non aiuto molto. Meglio raccogliere

$$\bar{z}^2(z^2+2) + i(z^2+2) = 0$$

$$(\bar{z}^2+i)(z^2+2) = 0 \iff \bar{z}^2 = -i \text{ or } z^2 = -2$$

$$\iff z^2 = i \text{ or } z = \sqrt{2}\cdot i \text{ or } z = -\sqrt{2}i$$



$$\iff z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i \,;\; z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

$$z_3 = \sqrt{2}i \qquad z_4 = -\sqrt{2}i$$

Utilizzando il teorema delle radici n-esime

$$z^2 = i = \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{2}\right)\cdot 1 \qquad z_1 = \sqrt[2]{1}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\,\mathrm{sen}\frac{\pi}{4}\right)$$

$$z_2 = \sqrt[2]{1}\left(\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right) + i\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{2}\right)\right)$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

o) $z^3 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right)\cdot \bar{z}$;

<u>dim</u>

$$\underbrace{z^3 = (-1+i\sqrt{3})\cdot\bar{z}}\ \overset{\text{Necess.}}{\Longrightarrow}\ |z|^3 = |-1+i\sqrt{3}|\cdot|\bar{z}|$$

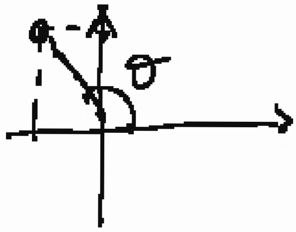
$$|z|^3 = 2\,|z|$$

$\boxed{z=0 \text{ è sol.}}$ $\quad z \neq 0 \Rightarrow |z|^2 = 2 \quad \Rightarrow \boxed{|z| = \sqrt{2}}$

$z^3 = (-1+i\sqrt{3})\,\bar{z}$ moltiplico per z ambo i membri

$\Updownarrow$

$z^4 = (-1+i\sqrt{3})\cdot\bar{z}\cdot z$



$z^4 = |z|^2(-1+i\sqrt{3})$

$z^4 = 2(-1+i\sqrt{3})$

$z^4 = 4\left(\cos\frac{2}{3}\pi + i \operatorname{sen}\frac{2}{3}\pi\right)$

$$z_0 = \sqrt[4]{4}\cdot\left(\cos\frac{\frac{2}{3}\pi}{4} + i \operatorname{sen}\frac{\frac{2}{3}\pi}{4}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)}_{\frac{2}{3}\pi} + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

$$z_2 = \sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)}_{\frac{7}{6}\pi} + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2}\right)$$

$$z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\underbrace{\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi\right)}_{\frac{5}{3}\pi = \frac{10}{6}\pi} + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{3}{2}\pi\right)\right) = \sqrt{2}\left(+\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$\text{e)}\quad \begin{cases} z^2 = -|w|^4 \\ w^2 - (2i+1)w = \dfrac{z+\bar{z}}{3} + 1 - i \end{cases} ;$$

Sol

$z^2 = -|w|^4 \in \mathbb{R}$ $\quad\boxed{z \neq 0 \text{ e } w \neq 0}$

① $z = i|w|^2$ o $z = -i|w|^2$ e la seconda eq. diventa

$\bar{z} = -i|w|^2$ o $\bar{z} = i|w|^2$ diventa

$w^2 - (2i+1)w - 1 + i = 0$

$\frac{z+\bar{z}}{3} = 0$ o $\frac{z+\bar{z}}{3} = 0$

$$\omega = a+ib \qquad (2ai - 2b + a + ib)$$

$$a^2 - b^2 + 2ab\cdot i - (2i+1)(a+ib) - 1 + i = 0$$

$$(a^2-b^2-a+2b-1) + i\,(2ab-2a-b+1) = 0$$

$$\begin{cases} a^2-b^2-a+2b-1=0 \\ 2ab-2a-b+1=0 \end{cases} \qquad \left.\begin{matrix} \\ 2a(b-1)-(b-1)=0 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{(b-1)(2a-1)\right. \iff \begin{cases} a(a-1)=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} \frac{1}{4}-b^2-\frac{1}{2}+2b-1=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a=0 \\ b=1 \end{cases} \text{ o } \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases} \text{ o } \cancel{\begin{cases} b^2-2b+\frac{5}{4}=0 \\ a=\frac{1}{2} \end{cases}}$$

$$b_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-\frac{25}{16}} \quad \text{IMP}$$

$\omega = i$ o $\omega = 1+i$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$z = i|\omega|^2 \stackrel{!}{=} i$ $\qquad$ $z = i|\omega|^2 \stackrel{!}{=} i2$

$\omega = i$ $\qquad$ $\omega = 1+i$

$\downarrow$ $\qquad$ $\downarrow$

$z = -i|\omega|^2 \stackrel{!}{=} -i$ $\qquad$ $z = -i|\omega|^2 \stackrel{!}{=} -i2$

Verificare

$\boxed{\text{M}}$