Polinomi Taylor
Integrazione secondo Riemann
" " " impropria
Cenni su ODE
Cenni sulle serie potenze
Numeri Complessi

Programma 2° semestre (di massima)

Def $f: A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A diciamo che "f è infinitesimo" se $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$ per $x \to x_0$

Indichiamo

$$o(1; x_0) = \{ f: A \to \mathbb{R} \ : \ A \in \mathcal{I}_{x_0} \text{ e } \lim_{x \to x_0} f = 0 \}$$

Esempi $x = o(1; 0)$ infatti $\lim_{x \to 0} x = 0$

$x^2 = o(1; 0)$

$x - 1 \neq o(1, 0)$ mentre $x - 1 = o(1; 1)$

Definiamo un possibile "ordine" in $o(1; x_0)$

Def: Date $f, g : A \to \mathbb{R}$, x_0 p.d.a. per A diciamo che "f infinitesimo di ordine maggiore rispetto a g per $x \to x_0$"

e indichiamo con "$\underbrace{f = o(g; x_0)}$"

se $f = g \cdot o(1; x_0)$

f è un o piccolo di g per $x \to x_0$

Esempio $x^2 = o(x; 0)$

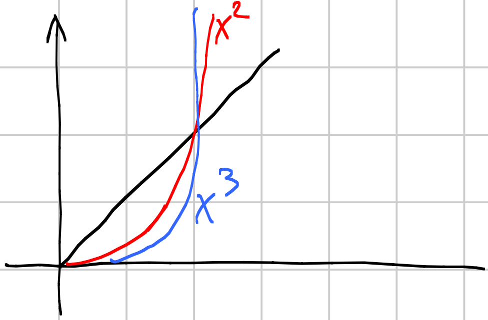
infatti $x^2 = x \cdot x$ ma $x = o(1; 0)$

dunque $x^2 = x \cdot o(1; 0)$

dunque $x^2 = o(x; 0)$ (per definizione)

andare a $\emptyset$ + velocemente

$x \ll x^2 \ll x^3 \ll x^4$ (x^2 va a zero + velocemente di x etc)



Teorema Date $f, g : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a. per A
$f, g = o(1; x_0)$ e $g(x) \neq 0$ in A

allora sono equivalenti

(i) $f = o(g; x_0)$

(ii) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

dim

(ii) $\Rightarrow$ (i) $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \Rightarrow \frac{f}{g} = o(1; x_0)$

$\underset{g \neq 0}{\Rightarrow} f = g \cdot o(1; x_0) \underset{\text{def "o"}}{\Rightarrow} f = o(g; x_0)$

(i) $\Rightarrow$ (ii) $f = o(g; x_0) \underset{\text{Def}}{\Rightarrow} f = g \cdot o(1; x_0)$

$\underset{g \neq 0}{\Rightarrow} \frac{f}{g} = o(1; x_0) \Rightarrow \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$ ////

Proprietà di "o" (simbolo di LANDAU)

Transitività $f = o(g; x_0)$ e $g = o(h; x_0) \Rightarrow f = o(h; x_0)$

$f = g \cdot o(1; x_0)$ e $g = h \cdot o(1; x_0)$ sostituendo

$\Rightarrow f = h \cdot o(1; x_0) \cdot o(1; x_0) \underset{(*)}{\Rightarrow} f = h \cdot o(1; x_0)$

$\Rightarrow f = o(h; x_0)$

(*) $o(1; x_0) \cdot o(1; x_0) = o(1; x_0)$ Banale

2) ANTISIMMETRIA : $f = o(g; x_0) \Rightarrow g \neq o(f, x_0)$

3) $o(f; x_0) \pm o(f; x_0) = o(f; x_0)$

$$o(f; x_0) + o(f; x_0) \underset{\text{Def}}{=} f\left(o(1; x_0) + o(1; x_0)\right) \overset{(**)}{=} f \cdot o(1; x_0)$$

$$\shortparallel$$

$$o(f; x_0)$$

(**) $\eta = o(1; x_0)$ e $\psi = o(1; x_0)$

$\Rightarrow \eta + \psi$ è un infinitesimo per $x \to x_0$

$\Rightarrow \eta + \psi = o(1; x_0)$ dunque $o(1; x_0) + o(1; x_0) \subseteq o(1; x_0)$

viceversa

$\eta = o(1; x_0) \Rightarrow \frac{\eta}{2} = o(1; x_0)$ ma $\eta = \frac{\eta}{2} + \frac{\eta}{2}$

$\Rightarrow \eta = o(1; x_0) + o(1; x_0)$ dunque

$o(1; x_0) \subseteq o(1; x_0) + o(1; x_0)$

4) $o(o(f; x_0); x_0) = o(f; x_0)$

5) $o(f; x_0) \cdot o(g; x_0) = o(f \cdot g; x_0)$

infatti $f \cdot o(1; x_0) \cdot g \cdot o(1; x_0) = f \cdot g \cdot o(1; x_0) = o(f \cdot g; x_0)$

6) $f = o(1; x_0) \Rightarrow f \cdot o(g; x_0) = o(f \cdot g; x_0)$

infatti $f \cdot o(g; x_0) \overset{\text{Def}}{=} f \cdot g \cdot o(1; x_0) = o(f \cdot g; x_0)$

7) $o(f + o(f; x_0); x_0) = o(f; x_0)$

$f = o(1; x_0)$

$o(f + o(f; x_0); x_0) = [f + o(f; x_0)] \cdot o(1; x_0) = o(f; x_0) + o(f; x_0)$

$= o(f; x_0)$

$x^2 = o(1;0)$ $\quad o(x^3;0) \Rightarrow \underbrace{x^2 \cdot o(x^3;0)}\, = \underbrace{o(x^5;0)}_{①}$

Però $x^2 = o(1;0) \Rightarrow \underbrace{x^2 \cdot o(x^3;0)} = o(1;0)\cdot o(x^3;0) = \underbrace{o(x^3;0)}_{②}$

① e ② sono corrette entrambe, ma ① ha "più informazioni"

Nel seguito considero $x \to 0^+$!

$\to o(x^\alpha) + o(x^\alpha) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$

$\to k \cdot o(x^\alpha) = o(kx^\alpha) \quad \forall k \neq 0 \ \forall \alpha > 0$

$\to x^\beta \cdot o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta}) \quad \forall \alpha, \beta > 0$

$\to o(x^\beta) \cdot o(x^\alpha) = o(x^{\alpha+\beta}) \quad \forall \alpha, \beta > 0$

$\to o(x^\alpha + o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$

$\to o(o(x^\alpha)) = o(x^\alpha) \quad \forall \alpha > 0$

$o(x^\alpha) = x^\alpha o(1)$

Teorema (principio di sostituzione dell'infinitesimo)

$f_1, g_1 = o(1;x_0) \quad f_2, g = o(1;x_0)$

Se $g_1 = o(f_1;x_0)$ e $g_2 = o(f_2;x_0)$

allora $\dfrac{f_1+g_1}{f_2+g_2}$ si comporta come $\dfrac{f_1}{f_2}$ per $x \to x_0$

dice

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f_1+g_1}{f_2+g_2} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1 + o(f_1;x_0)}{f_2 + o(f_2;x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{f_2} \cdot \frac{1+o(1;x_0)}{1+o(1;x_0)}$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{f_1}{f_2}$$

in quanto $\displaystyle\lim_{x\to x_0} \frac{1+o(1;x_0)}{1+o(1;x_0)} = 1$ $\blacksquare$

Esempio Calcolare $\lim_{x\to 0} \frac{x+1-\cos x}{x+\operatorname{sen} x}$

dim

è della forma $0/0$

$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$

$\Rightarrow \quad 1-\cos x - \frac{x^2}{2} = x^2 \cdot o(1) = o(x^2)$ per $x\to 0$

$\Rightarrow \quad 1-\cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2)$

$\Rightarrow \quad \boxed{1-\cos x = o(x)}$ ① in quanto $\boxed{\frac{x^2}{2}+o(x^2) = o(x)}$

Vedi al termine ex

$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x - x}{x} = 0 \Rightarrow \operatorname{sen} x - x = x\cdot o(1)$

$\Rightarrow \boxed{\operatorname{sen} x = x + o(x)}$ ②

$$\lim_{x\to 0} \frac{x+1-\cos x}{x+\operatorname{sen} x} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{x+x+o(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x+o(x)}{2x+o(x)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x}{2x} = \frac{1}{2} \quad ▨$$

N.B. Proviamo che $\frac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x)$ per $x\to 0$

$o(x^2) = o(x)$ per $x\to 0$ (infatti $o(x^2) \subseteq o(x)$)

$\frac{x^2}{2} = o(x)$ " " (infatti $\lim_{x\to 0} \frac{x^2/2}{x} = 0$)

dunque $\frac{x^2}{2} + o(x^2) = o(x) + o(x) = o(x)$ ▨

Def (Polinomio di Taylor)

Data $f: A \to \mathbb{R}$ $\quad x_0$ p.d.a. per A

Un polinomio $P_n(x)$ è detto

"polinomio di Taylor $\underbrace{\text{di ordine } n}$ $\underbrace{\text{relativo ad } f}$ $\underbrace{\text{centrato in } x_0}$"

se

$$f(x) = P_n(x) + o\left((x-x_0)^n ; x_0\right)$$

ovvero se

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - P_n(x)}{(x-x_0)^n} = 0$$

Esempio $\text{sen}\, x = x + o(x)$ per $x \to 0$

$\Rightarrow P_1(x) = x$ polinomio Taylor ordine 1 centrato in $x_0 = 0$ relativo a sen x

$$1 - \cos x = \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2) \quad \text{per } x \to 0$$

$\Rightarrow P_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2}$ pol. Taylor di ordine 2 centrato in $x_0 = 0$ relativo a cos x

$\to e^x = 1 + x + o(x)$ - - -

$\to \log(1+x) = x + o(x)$

$\text{sen}\, x = x + o(x)$

$\log(1+x) = x + o(x)$

Teorema

$f : A \to \mathbb{R}$ x_0 p.d.a per A

Se esiste $T_n(x)$ centrato in x_0 relativo a f di ordine n allora è unico

dim

Per assurdo $\exists\, T_n(x)$ e $Q_n(x)$ t.c.

$$f(x) - T_n(x) = o((x-x_0)^n ; x_0)$$

$$f(x) - Q_n(x) = o((x-x_0)^n ; x_0)$$

$$\Downarrow$$

$$Q_n(x) - T_n(x) = (q_0 - p_0) + (q_1 - p_1)(x-x_0) + \dots + (q_n - p_n)(x-x_0)^n = o((x-x_0)^n ; x_0)$$

$$Q_m(x_0) - P_m(x_0) = q_0 - p_0 = 0 \quad \text{ponendo } x = x_0$$

$$\Downarrow$$

$$q_0 = p_0$$

$$\Downarrow$$

$$Q_m(x_0) - P_m(x_0) = (x-x_0)\left\{(q_1-p_1) + (q_2-p_2)(x-x_0) + \dots + (q_m-p_m)(x-x_0)^{m-1}\right\}$$

$$= o((x-x_0)^m ; x_0)$$

$\Downarrow$ divido per $x-x_0$

$$(q_1-p_1) + (q_2-p_2)(x-x_0) + \dots + (q_m-p_m)(x-x_0)^{m-1} = o((x-x_0)^{m-1}; x_0)$$

pongo $x = x_0$ e trovo

$q_1 - p_1 = 0 \Rightarrow q_1 = p_1$ e quindi

$$Q_m - P_m = (x-x_0)^2\left\{(q_2-p_2) + (q_3-p_3)(x-x_0) + \dots + (q_m-p_m)(x-x_0)^{m-2}\right\}$$

$$= o((x-x_0)^m ; x_0)$$

pongo $x = x_0$ - - - -

Dopo m passaggi scopro $Q_m = P_m$

Teorema (formula di Taylor con il resto di Peano)

$f:]a,b[\to \mathbb{R}$ $\quad x_0 \in]a,b[$

f derivabile $(m-1)$ volte in $]a,b[$

f " m " in x_0

Posto $\displaystyle P_m = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

$$\Rightarrow f(x) = P_m(x) + o((x-x_0)^m ; x_0)$$

Esercizio Data $f(x) = 1 + (x-1)^2 - 2(x-1)^3$

1) calcolare P_1, P_2, P_3 polinomi Taylor centrati in $x_0=1$

2) " P_1, P_2, P_3 " " " " $x_0=0$

divo

1) $P_1 = 1$ infatti $f - P_1 = (x-1)^2 - 2(x-1)^3 = o((x-1); 1)$

ovvero $\lim_{x\to 1} \frac{f-P_1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x-1)^2 - 2(x-1)^3}{x-1} = 0$

$P_2 = 1 + (x-1)^2$

$P_3 = f(x)$

2) $f(x) = 1 + (x-1)^2 - 2(x-1)^3$
$= \cancel{1} + x^2 - 2x + \cancel{1} - 2(x^3 - 3x^2 + 3x - \cancel{1})$
$= 4 - 8x + 7x^2 - 2x^3$

$P_1 = 4 - 8x$
$P_2 = 4 - 8x + 7x^2$
$P_3 = f(x)$

Esercizio $f(x) = 3 - x^2 + x^4 + o(x^5)$
$g(x) = x^3 + o(x^3)$

calcolare $f \cdot g$

divo

$(3 - x^2 + x^4 + o(x^5))(x^3 + o(x^3))$

$= 3x^3 + o(x^3) - x^5 + o(x^5) + x^7 + o(x^7) + o(x^8) + o(x^8)$

$o(x^8)+o(x^8)=o(x^8)$

$o(x^7)+o(x^8)=o(x^7)$

$o(x^3)+o(x^5)+o(x^7)=o(x^3)$

$-x^5=o(x^3) \quad x^7=o(x^3)$

$=3x^3+o(x^3)$

$$\left(x+2x^3+o(x^4)\right)\left(x^2+x^3+o(x^5)\right)$$

$$=x^3+x^4+\underbrace{o(x^6)}+2x^5+2x^6+o(x^8)+o(x^6)+o(x^7)+o(x^9)$$

$$=x^3+x^4+2x^5+2x^6+o(x^6)$$

$f=x+2x^3+o(x^4)$

$g=1-x^2+o(x^4)$

$$(g\circ f)(x)=1-(f(x))^2+o(f^4(x))$$

$$=1-\left(x+2x^3+o(x^4)\right)^2+o\left(\left(x+2x^3+o(x^4)\right)^4\right) \quad (*)$$

$$=1-\left(x^2+4x^4+o(x^5)+4x^6+o(x^7)+o(x^8)\right)$$

$$+o\left(\left(x+o(x)\right)^4\right)$$

$$=1-x^2+4x^4+o(x^5)+o\left(x^4+o(x^4)\right)$$

$$=1-x^2+4x^4+o(x^4)$$

$(*)$ $o\left(\left(x+2x^3+o(x^4)\right)^4\right)=o\left(x^4+\overbrace{\text{termini di ordine sup}}^{o(x^4)}\right)$

$$=o\left(x^4+o(x^4)\right)=o(x^4)$$