

Esercizio

Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt$
 dim

Nella veste di calcolatore esplicitamente $F(x)$
 integrando per parti

La f. integranda $f(t) = t^2 e^{-t}$ è continua in $\mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ integrabile in $[0, x]$ ($\cup [x, 0]$) $\forall x \in \mathbb{R}$
 $\Rightarrow$ dominio massimale di F $\mathbb{R}$

Limiti agli estremi del dominio

$$+\infty \quad f(t) = t^2 \cdot e^{-t} = \frac{t^2}{e^t} = o\left(\frac{1}{t^2}\right) \quad t \rightarrow +\infty$$

$$\left(\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{f(t)}{\frac{1}{t^2}} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{e^t} \cdot t^2 = 0^+ \quad e^t \geq t^5 \quad t \rightarrow +\infty \right)$$

$\Rightarrow$ per il criterio confronto asintotico, essendo $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt \in \mathbb{R}$,

$$\text{si ha} \quad \int_0^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = L \in \mathbb{R}$$

$$-\infty \quad f(t) = t^2 \cdot e^{-t} > t^2 \quad t < 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = \int_0^{-\infty} f(t) dt = - \int_{-\infty}^0 f(t) dt < - \int_{-\infty}^0 t^2 dt = -\infty$$

SEGNO

$$F(x) = \int_0^x t^2 e^{-t} dt \quad \begin{cases} > 0 & x > 0 \\ = 0 & x = 0 \\ < 0 & x < 0 \end{cases}$$

MONOTONIA

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x f(t) dt \right) \stackrel{\substack{\text{Teorema} \\ \text{Fund. Calcolo}}}{=} f(x) = x^2 e^{-x} > 0 \quad \forall x \neq 0$$

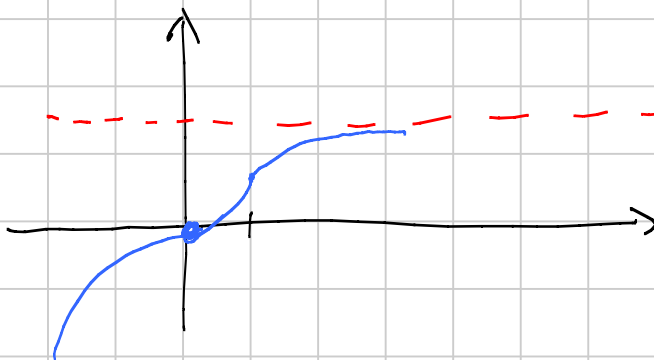
$\Rightarrow F$ è strett. crescente su $\mathbb{R}$

DERIVATA SECONDA

$$F''(x) = (x^2 e^{-x})' = 2x e^{-x} - x^2 e^{-x} = e^{-x} \cdot x(2-x) = 0$$

$$\underline{x=0} \quad \text{or} \quad x=2$$

$$F''(x) \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ \geq 0 & 0 < x < 2 \\ < 0 & 2 < x \end{cases} \Rightarrow f(x) \begin{cases} \text{concave} & x < 0 \\ \text{convessa} & 0 < x < 2 \\ \text{concave} & 2 < x \end{cases}$$



$\Rightarrow$ calcolare
esplicitamente
 $F(x)$
e calcolare
lim $f(x)$
 $x \rightarrow +\infty$

Esercizio Determinare per quali valori di α

converge $\int_0^1 \frac{(1-\cos x)^\alpha}{x - \sin x} dx$

dim

$$f(x) = \frac{(1-\cos x)^\alpha}{x - \sin x} \quad \text{continua } \forall x \in (0, 1]$$

quindi $\int_\beta^1 f(x) dx \in \mathbb{R} \quad \forall \beta \in (0, 1]$

dunque ci deve studiare

3

$$\lim_{p \rightarrow 0} \int_p^1 f(x) dx$$

Studio $f(x)$ per $x \rightarrow 0^+$

$$f(x) = \frac{(1 - \cos x)^\alpha}{x - \cos x} = \frac{[1 - (1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3))]^\alpha}{x - (x - \frac{x^3}{6} + o(x^4))} \quad x \rightarrow 0$$
$$= \frac{[\frac{x^2}{2} + o(x^2)]^\alpha}{\frac{x^3}{6} + o(x^3)} \sim \frac{(\frac{x^2}{2})^\alpha}{\frac{x^3}{6}} = \frac{6}{2^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-2\alpha} \quad x \rightarrow 0$$

$$f(x) \sim \frac{6}{2^\alpha} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{3-2\alpha} \quad x \rightarrow 0^+$$

$$\text{ma } \frac{6}{2^\alpha} \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{3-2\alpha} dx \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad 3-2\alpha < 1$$
$$\quad \text{se} \quad -2\alpha < -2$$
$$\quad \text{se} \quad \alpha > 1$$

Per il criterio del confronto asintotico

$$\int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R} \quad \text{se} \quad \alpha > 1$$

Esercizio dato $F(x) = \left[\int_1^x e^{2t-t^2} dt - 1 \right]$

1) Trovare che F è invertibile

2) Dato $G = F^{-1}$ calcolare l'equazione della
retta tg a G nel punto $(-1, G(-1))$
dimu

4
 F è definito su tutto $\mathbb{R}$ (in quanto
 $f(t) = e^{2t-t^2}$ è continua e dunque integrabile
su $[0, x]$ $\forall x \in \mathbb{R}$)

Per provare che f invertibile è sufficiente
e necessario che f sia strett. monotona

$$\text{ma } f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\int_0^x e^{2t-t^2} dt - 1 \right) = e^{2x-x^2} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

dunque F è strett. crescente dunque f
è invertibile (e pure iniettiva, quindi)

Devo individuare $G(-1) = F^{-1}(-1)$

$G(-1) = \{x \in \mathbb{R} : F(x) = -1\}$
ovvero debbo risolvere l'equazione

$$\int_0^x e^{2t-t^2} dt - 1 = -1$$

$x=0$ è t.c. $f(0) = -1$

ma f è iniettiva e dunque $f(x) = -1$ solo $x=0$

Dunque devo calcolare l'eq. delle Tg in

$$(-1, G(-1)) = (-1, 0)$$

$$G'(x) = \frac{1}{F'(F^{-1}(x))}$$

$$G'(-1) = \frac{1}{F'(0)} = \frac{1}{e^{2 \cdot 0 - 0^2}} = 1$$

L'equazione è data da

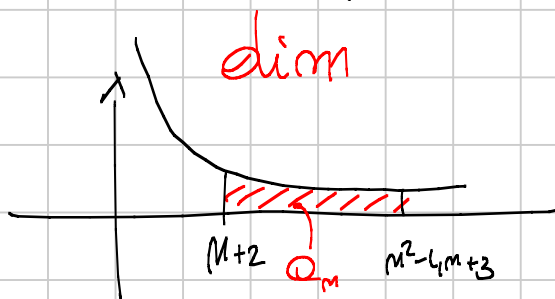
5

$$y - G(-1) = G'(-1) \cdot (x - (-1))$$

$$y - 0 = 1(x+1) \quad \boxed{y = x+1}$$

Esercizio Data $a_m = \int_{m+2}^{m^2-4m+3} \frac{dx}{x^3+2x+1}$

calcolare $\lim_{m \rightarrow +\infty} a_m$



$$a_m = \int_{m+2}^{m^2-4m+3} \frac{dx}{x^3+2x+1} = F(m^2-4m+3) - F(m+2)$$

dove $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{t^3+2t+1}$

$$Q_m = F(m^2 - 4m + 3) - F(m+2) = F'(\xi_m) (m^2 - 4m + 3 - m - 2) \quad \uparrow \text{dérivée}$$

dove $\xi_m \in (m+2, m^2 - 4m + 3)$

$$Q_m = \frac{1}{\xi_m^3 + 2\xi_m + 1} \cdot (m^2 - 5m + 1)$$

$$F'(x) = \frac{1}{x^3 + 2x + 1} \text{ è decrescente } \left(F''(x) = \frac{-3x^2 - 2}{(x^3 + 2x + 1)^2} < 0 \quad \forall x > 0 \right)$$

$$\Rightarrow F' \text{ è decrescente in } (m+2, m^2 - 4m + 3)$$

e dunque

$$Q_m = F'(\xi_m) \cdot (m^2 - 5m + 1) < F'(m+2) \cdot (m^2 - 5m + 1)$$

$$\text{cioè } Q_m < \frac{1}{(m+2)^3 + 2(m+2) + 1} \cdot (m^2 - 5m + 1)$$

$\downarrow m \rightarrow +\infty$

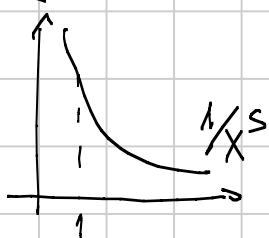
$$\Rightarrow Q_m \rightarrow 0$$

Esercizio provare che $\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{k^s} < \frac{(m-1)^{1-s}}{s-1}$

$$\forall s > 1 \quad \forall m \geq 2$$

dim

$$\left(\frac{1}{x}\right)^s \text{ decrescente } \forall s > 1 \quad \forall x > 1$$



$$\frac{1}{m^s} \leq \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{(m-1)^s} \quad x \in (m-1, m)$$

$$\int_{m-1}^m \frac{1}{m^s} \leq \int_{m-1}^m \frac{1}{x^s} \leq \int_{m-1}^m \frac{1}{(m-1)^s}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^s} \leq \int_{n-1}^n \frac{1}{x^s} \leq \frac{1}{(n-1)^s} \quad s > 1$$

$$\left[\frac{x^{1-s}}{1-s} \right]_{x=n-1}^{x=n}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^s} \leq \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{(n-1)^{1-s}}{1-s} \leq \frac{1}{(n-1)^s} \quad s > 1$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^s} \leq \frac{n^{1-s}}{1-s} - \frac{(n-1)^{1-s}}{1-s}$$

$$\frac{1}{(n+1)^s} \leq \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s} - \frac{n^{1-s}}{1-s}$$

$$\frac{1}{(n+2)^s} \leq \frac{(n+2)^{1-s}}{1-s} - \frac{(n+1)^{1-s}}{1-s}$$

...

$$\sum_{k=n}^{\infty} \left(\frac{1}{k} \right)^s \leq \int_{n-1}^{+\infty} \frac{1}{x^s} dx = \frac{(n-1)^{1-s}}{s-1}$$

Applicazioni $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (lo vedrete)

Con il risultato precedente

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^2 \frac{1}{n^2} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{(3-1)^{1-2}}{2-1} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{2}$$

però migliorare

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^3 \frac{1}{n^2} + \sum_{n=4}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{(4-1)^{1-2}}{2-1}$$

$$= 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=1}^4 \frac{1}{n^2} + \sum_{n=5}^{\infty} \frac{1}{n^2} \leq 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{(5-1)^{1-2}}{2-1}$$

Esercizio Provare che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \log 2$

Però ^{dim} mostrando che $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ converge

per $x \in (-1, 1) \cup \{-1\} = [-1, 1)$

Sia $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots$

$$f'(x) = 1 + x + x^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$\Downarrow$

$$f(x) = -\log |1-x| + C$$

ma

$$f(0) = 0 \Rightarrow -\log |1-0| + C = C = 0$$

ovvero $f(x) = -\log |1-x| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$

$$\Rightarrow f(-1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -\log 2$$

$$\int \frac{1}{1-x} = -\int \frac{dx}{x-1}$$

Esercizio Studiare la convergenza di

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} dx$; al limite di α

dim

$$f(x) = \frac{\arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} \text{ continua su } (0, +\infty)$$

dunque dobbiamo studiare $\int_0^1 f(x) dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x) dx$

in $x=0$

$$f(x) = \frac{\arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{x}{1 \cdot x^{3\alpha}} = \left(\frac{1}{x}\right)^{3\alpha-1}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{x^{3\alpha-1}} dx \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{se } 3\alpha-1 < 1 \\ \text{se } 3\alpha < 2 \\ \text{se } \alpha < 2/3 \end{array}$$

Quindi $\int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha < 2/3$

in $x=+\infty$ $f(x) = \frac{\arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{\pi/2}{x^{2\alpha} \cdot x^{3\alpha}} = \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{x}\right)^{5\alpha}$

$$\int_1^{+\infty} \frac{\pi}{2} \cdot \left(\frac{1}{x}\right)^{5\alpha} dx \in \mathbb{R} \quad \begin{array}{l} \text{se } 5\alpha > 1 \\ \text{se } \alpha > 1/5 \end{array}$$

Quindi $\int_1^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}$ se $\alpha > 1/5$

Concludendo

$$\int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{se}} \quad \alpha \in \left\{ \alpha : \alpha < \frac{2}{3} \right\} \cap \left\{ \alpha : \alpha > \frac{1}{5} \right\}$$

$$\underline{\text{se}} \quad \alpha \in \left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3} \right)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$\sum_{k=4}^{+\infty} x^{k-3}$$

$$=$$

$$k-3=h$$

$$\sum_{h=1}^{\infty} x^h$$

$$= \frac{1}{1-x} - 1$$

$$= \sum_{h=0}^{\infty} x^h - \sum_{h=0}^0 x^h$$