ESERCIZI DI ANALISI MATEMATICA 1
A.A. 14/15

Esercizio 1. Provare che la funzione $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x) = x^{35} \log(x), \qquad x \in \mathbb{R}_+$$

non ha integrale improprio finito in $[1, +\infty)$.

Esercizio 2. Determinare per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$, la funzione $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \mathrm{e}^{\alpha x^4}, \qquad x \in \mathbb{R},$$

ha integrale improprio finito in $\mathbb{R}$.

Esercizio 3. Studiare la funzione $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x s\mathrm{e}^{s^3}\, ds, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 4. Stabilire per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione $f_\alpha : (0, 1] \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \frac{\sin(x)(\tan(x))^4}{x^\alpha(\sinh(x))^3}, \qquad x \in (0, 1],$$

ha integrale improprio finito in $[0, 1]$. Come cambia la risposta se si sostituisce il seno iperbolico con il coseno iperbolico?

Esercizio 5. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n \log n}{1 + n^2}.$$

Esercizio 6. Calcolare

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{n+2}^{n^2-4n+3} \frac{1}{x^3 + 2x + 1} dx.$$

(Non serve calcolare esplicitamente il valore dell'integrale!)

Esercizio 7. Determinare se esiste

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/2}^{n} \frac{\log(x)}{x} dx,$$

e in caso affermativo calcolarlo.

Esercizio 8. Determinare se esiste finito

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{1/2}^{n} \frac{\cosh(x)}{x^4} dx.$$

Cambia la risposta se si sostituisce il coseno iperbolico con il seno iperbolico?

(Può essere utile ricordare che $\cosh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x})$ e $\sinh(x) = \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-x})$.)

Esercizio 9. Sia f periodica di periodo T continua tale che $f > 0$ in $(0, T/2)$ e $f < 0$ in $(T/2, T)$ e tale che $\int_0^T f(t) = 0$. Provare che non esiste

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)dt.$$

Si usi il teorema di collegamento, determinando due opportune successioni $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ divergenti a $+\infty$ e tali che

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{a_n} f(t)dt \neq \lim_{n \to +\infty} \int_0^{b_n} f(t)dt.$$

Esercizio 10. Determinare i valori del parametro reale α per i quali la funzione

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{arctg}(x)}{x^\alpha}$$

ha integrale improprio finito in $(0, +\infty)$.

Esercizio 11. Stabilire se la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}(1+x)}$$

è sommabile in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$ (ovvero se l'integrale improprio di $|f|$ è convergente). Calcolare il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_b^{3b} f(x)dx.$$

Esercizio 12. Studiare la funzione $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definita da

$$F(x) = \int_0^x \frac{e^{t^2} - e^{-t^2}}{e^{t^2} + e^{-t^2}} dt.$$

Sono richiesti lo studio della monotonia, di eventuali simmetrie e della convessità. Stabilire in particolare se F è dotata di asintoti obliqui per $x \to \pm\infty$ e se è uniformemente continua in $\mathbb{R}$.

Esercizio 13. Stabilire se la funzione

$$f(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{x}(1+x)}$$

è sommabile in $(0, 1)$ e in $(1, +\infty)$. Calcolare il limite

$$\lim_{b \to +\infty} \int_b^{3b} f(x)dx.$$

Esercizio 14. Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, la sommabilità in $(0, +\infty)$ della funzione $f_\alpha : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{x^\alpha} \log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \arctan(x), \qquad x \in (0, +\infty).$$

Esercizio 15. Stabilire se la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

è sommabile nella semiretta $(1, +\infty)$ e in tale caso calcolare

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx.$$

Esercizio 16. Al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}_+$, si studi la sommabilità in $(0, +\infty)$ della funzione $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ definita da

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \frac{x^3 \operatorname{atan}(x^4 + 2x)}{\log(1 + x^\alpha)} \log(x^5) \frac{(e^x - 1)^\beta}{e^x + 2}, \qquad x > 0.$$

Esercizio 17. Determinare le soluzioni del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = 2xy^3, \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y' = 2xy^3, \\ y(0) = 0, \end{cases}$$

determinando l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tali soluzioni sono definite.

Esercizio 18. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 5y' = -8e^x - 10x - 13, \\ y(0) = 5, \\ y'(0) = 10, \end{cases}$$

determinando l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Esercizio 19. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'' - 4y' + 3y = 3x + 2 - 4e^x, \\ y(0) = 7, \\ y'(0) = 16, \end{cases}$$

determinando l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Esercizio 20. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = \dfrac{y(x)}{x} + x + 1, \\ y(1) = 1 \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 1$ in cui tale soluzione è definita.

Esercizio 21. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (2x + 1)e^y, \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

e indicare l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Esercizio 22. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) - 2y'(x) + 5y(x) = (4x^2 + 4x + 6)e^x, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) = 9 \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Esercizio 23. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y' = y(y-1)(x-1), \\ y(0) = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Esercizio 24. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = (2x+1)e^y, \\ y(0) = 1. \end{cases}$$

e indicare l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.

Esercizio 25. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y'(x) = x \log(x^2+1)(y(x)-1)^2, \\ y(0) = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

Esercizio 26. Determinare la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} y''(x) + 3y'(x) - 4y(x) = 21e^{5x} + 5e^x, \\ y(0) = 2, \\ y'(0) = 17, \end{cases}$$

e indicare esplicitamente l'intervallo più grande contenente $x = 0$ in cui tale soluzione è definita.