

Teorema 2

$$f, g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

i) f, g continueii) $f, g \geq 0$ iii) $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f}{g} = l \in]0, +\infty[$

In queste ipotesi sono equiv. le seguenti affermazioni:

a) $\int_a^b f(x) dx$ converge (diverge)b) $\int_a^b g(x) dx$ converge (")

dimostriamo le ipotesi

$$i) \Rightarrow \exists \int_a^b f(x) dx \quad \int_a^b g(x) dx \quad \forall p \in [0, b[$$

in quanto

"f continua su $[a, p]$ $\Rightarrow$ f integrabile su $[a, p]$ "Ho bisogno di questo poiché $\int_a^b f(x) dx = \lim_{p \rightarrow b^-} \int_a^p f(x) dx$ ii) $f, g \geq 0, g > 0$ $f \geq 0$ su $[a, b[\Rightarrow F(x) = \int_a^x f(t) dt$ è monot. crescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{x \rightarrow b^-} F(x) \Rightarrow \exists \int_a^b f(t) dt \quad \begin{matrix} \text{finito} \\ \text{infinito} \end{matrix}$$

iii) $\lim_{x \rightarrow b^-} \frac{f(x)}{g(x)} = l \in]0, +\infty[$ ovvero

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta = \delta(\varepsilon, b) > 0 : \forall x \in]b-\delta, b[\Rightarrow l - \varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < l + \varepsilon$$

 $\Downarrow$

$$\varepsilon = \frac{l}{2} \quad \exists \delta > 0 \quad \forall x \in]b-\delta, b[\Rightarrow \frac{l}{2} < \frac{f(x)}{g(x)} < \frac{3l}{2}$$

 $\Downarrow$

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in]b-\delta, b[\quad g(x) \cdot \left(\frac{l}{2}\right) < f(x) < g(x) \cdot \left(\frac{3l}{2}\right)$$

Ora vedo a considerare

$$\int_{b-\delta}^b f(x) dx \quad \text{e} \quad \int_{b-\delta}^b g(x) dx$$

$b-\delta \uparrow \quad \quad \quad b-\delta \uparrow$

(poiché $\int_a^{b-\delta} f dx \in \mathbb{R}$ $\int_a^{b-\delta} g dx \in \mathbb{R}$) 2

$\uparrow$
 poiché
 g, f continue
 su $[a, b-\delta]$

e mi conclude con il Teorema Confronto

Oss: Se $l=0$, ripercorrendo la dimostrazione ottengo come tesi che

- se $\int_a^b f dx$ diverge allora $\int_a^b g dx$ diverge
- se $\int_a^b g dx$ converge allora $\int_a^b f dx$ converge

Esercizio Determinate tutte le soluzioni di

$$y'(x) = x \cdot y(x) \cdot (y(x) + 1) \quad (*)$$

dove

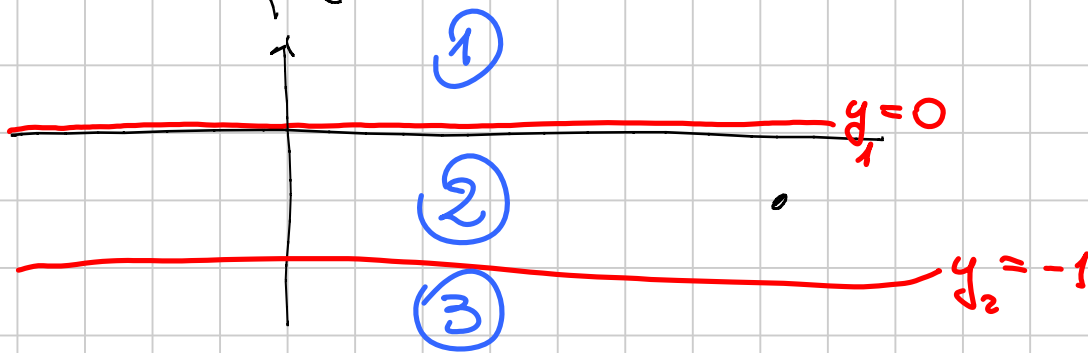
Cerco quelle funzioni $y = y(x)$ che soddisfano (*)

Le prime soluzioni da identificare sono le sol. costanti, sono le soluz. $y = k$ di

$$f(x, y) = x \cdot y \cdot (y + 1) = 0 \quad \forall x$$

In questo caso $y_1(x) = 0$ $y_2(x) = -1$

Per il Teorema di $\exists!$ delle sol. delle equazioni diff. ordinarie, due soluz. $\neq$ non hanno punti del grafico in comune e dunque



Una qualsiasi sol. di (*) ha il 3
 grafico che sta in 1 ed 2 sola
 delle 3 regioni (per l'unicità le sol. non possono
 attraversare $y=0$ o $y=-1$)

$$y'(x) = x \cdot y(x) (y(x)+1) \quad \text{Separo le variabili}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{y'(x)}{y(x)(y(x)+1)} = x$$

$$\int_{x_0}^x \frac{y'(t)}{y(t)(y(t)+1)} dt = \int_{x_0}^x t dt \quad (y(x_0) = y_0, \text{ b.c.i.})$$

$$y(t) = z \quad dz = y'(t) dt$$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \frac{dz}{z(z+1)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

$$\int_{y(x_0)}^{y(x)} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \left[\log \left| \frac{z}{z+1} \right| \right]_{y(x_0)}^{y(x)} = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

$$\log \left| \frac{y(x)}{y(x)+1} \right| - \log \left| \frac{y(x_0)}{y(x_0)+1} \right| = \frac{x^2}{2} - \frac{x_0^2}{2}$$

$$\log \left| \frac{y(x)}{y(x)+1} \right| = K + \frac{x^2}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\left| \frac{y(x)}{y(x)+1} \right| = \underbrace{\left(e^K \right)}_C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}}$$

Se $(x_0, y(x_0)) \in (1)$, ovvero $\in \{(x, y) : y > 0\}$

allora $y(x) > 0 \forall x$ $y(x)+1 > 0 \forall x$

allora $y(x) = C \cdot e^{\frac{x^2}{2}} \cdot (y(x)+1)$

allora $y(x) (1 - C e^{\frac{x^2}{2}}) = C e^{\frac{x^2}{2}}$

allora $y(x) = \frac{c e^{x^2/2}}{1 - c e^{x^2/2}}$ e ricompo nel caso ① 4

Se $(x_0, y(x_0)) \in \textcircled{2}$ allora $-\frac{y(x)}{y(x)+1} = e^{x^2/2} \cdot c$

allora $y(x) = -c \cdot e^{x^2/2} \cdot y(x) - c e^{x^2/2}$

allora $y(x) (1 + c e^{x^2/2}) = -c e^{x^2/2}$

allora $y(x) = -\frac{c e^{x^2/2}}{1 + c e^{x^2/2}}$ quinto nel caso ②

Se $(x_0, y(x_0)) \in \textcircled{3}$ allora $\frac{y(x)}{y(x)+1} = c e^{x^2/2}$

allora $y(x) = \frac{c e^{x^2/2}}{1 - c e^{x^2/2}}$ nel caso ③

$$y(x) = \begin{cases} \frac{c e^{x^2/2}}{1 - c e^{x^2/2}} & \text{se } y(x_0) > 0, \text{ caso } \textcircled{1} \\ 0 & \text{se } y(x_0) = 0 \\ -\frac{c e^{x^2/2}}{1 + c e^{x^2/2}} & \text{se } -1 < y(x_0) < 0, \text{ caso } \textcircled{2} \\ -1 & \text{se } y(x_0) = -1 \\ \frac{c e^{x^2/2}}{1 - c e^{x^2/2}} & \text{se } y(x_0) < -1, \text{ caso } \textcircled{3} \end{cases}$$

$c = e^{\tilde{k}}$ dove $\tilde{k} = \log \left| \frac{y(x_0)}{y(x_0)+1} \right| - \frac{x_0^2}{2}$

1° caso $x_0 = 0 \quad y(0) = 2$

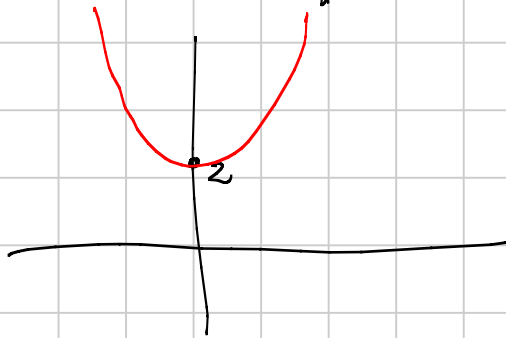
$\tilde{k} = \log \left| \frac{2}{2+1} \right| = \log \frac{2}{3} \Rightarrow c = e^{\tilde{k}} = \frac{2}{3}$

$y(x) = \frac{\frac{2}{3} e^{x^2/2}}{1 - \frac{2}{3} e^{x^2/2}}$ $\bar{c}$ def. su $J-b, bU$

dove b è la sol. ^{positiva} di $1 = \frac{2}{3} e^{\frac{x^2}{2}}$ 5

$$\frac{x^2}{2} = \log \frac{3}{2}$$

$$x = \pm \sqrt{2 \log \frac{3}{2}}$$



Nota bene: $\tilde{K} = \log \left| \frac{y_0}{y_0+1} \right| - \frac{x_0^2}{2}$ $y_0 = y(x_0)$

$$\Rightarrow C = e^{\tilde{K}} > 0 \quad \forall x_0, y_0 \quad (y_0 > 0)$$

Gli eventuali asintoti sono soluzioni di

$$1 - C e^{\frac{x^2}{2}} = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{C} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \log \frac{1}{C} = -2 \log C$$

e questa equazione, per avere soluzioni, deve soddisfare

$$\log C = \log e^{\tilde{K}} = \tilde{K} = \log \left| \frac{y_0}{y_0+1} \right| - \frac{x_0^2}{2} < 0$$

e questo è sempre vero quando $y_0 > 0$ infatti

$$0 < \frac{y_0}{y_0+1} < 1 \quad \forall y_0 > 0 \Rightarrow \log \frac{y_0}{y_0+1} < 0 \quad \forall y_0 > 0$$

$$-\frac{x_0^2}{2} \leq 0 \quad \forall x_0$$

dunque troviamo sempre due asintoti
verticali

②

$$y(x_0) = -\frac{1}{2}$$

$$x_0 = 0$$

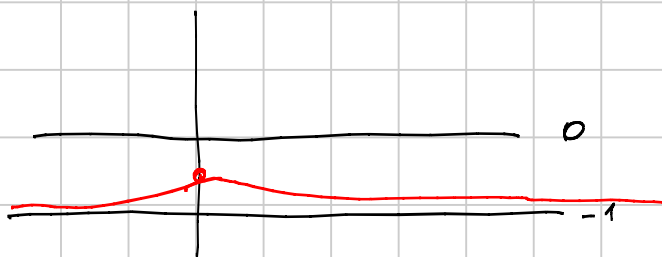
$$\tilde{k} = \log \left| \frac{-\frac{1}{2}}{-\frac{1}{2} + 1} \right| = 0$$

$$C = e^{\tilde{k}} = 1$$

6

$$y(x) = -\frac{e^{\frac{x^2}{2}}}{1 + e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$$



③

$$x_0 = 0 \quad y(x_0) = -2$$

$$\tilde{k} = \log \left| \frac{-2}{-2 + 1} \right| = \log 2$$

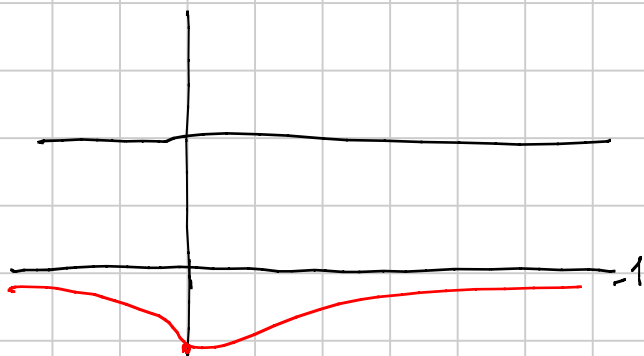
$$C = 2$$

$$y(x) = \frac{2e^{\frac{x^2}{2}}}{1 - 2e^{\frac{x^2}{2}}}$$

$1 = 2e^{\frac{x^2}{2}} \quad \frac{1}{2} = e^{\frac{x^2}{2}} \quad \frac{x^2}{2} = \log \frac{1}{2} \quad \text{NON ha sol.}$
 ovvero il denominatore è sempre $\neq 0$
 " $y(x)$ è definita su tutto $\mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = -1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$$

7



$$y(x) = \frac{c \cdot e^{x^2/2}}{1 - c \cdot e^{x^2/2}}$$

Osservazione: Nel caso (3) la soluzione non ha asintoti verticali
 $\forall (x_0, y_0)$ con $y_0 < -1$
 Infatti gli eritoti sono le soluzioni di

$$1 = c e^{x^2/2} \Leftrightarrow \frac{x^2}{2} = \log \frac{1}{c} = -\log c$$

$$\Leftrightarrow x^2 = -2 \log c$$

e questa ha soluzione se

$$\log c = \log e^{\tilde{k}} = \tilde{k} = \log \left| \frac{y_0}{y_0+1} \right| - \frac{x_0^2}{2} < 0$$

ovvero $\log \left| \frac{y_0}{y_0+1} \right| < \frac{x_0^2}{2}$

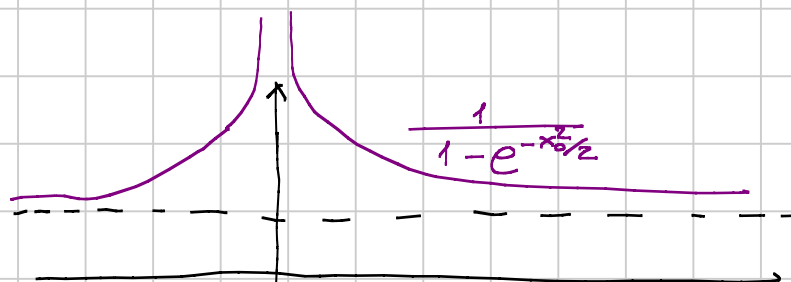
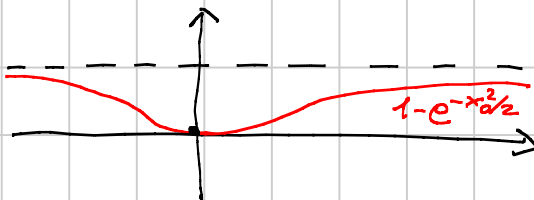
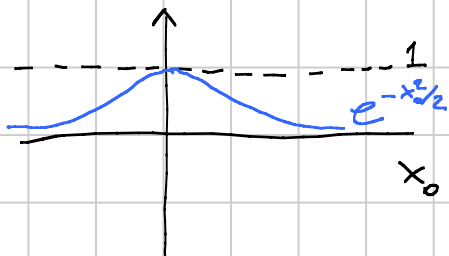
Recordando che in questo caso $y_0 < -1 \Rightarrow \left| \frac{y_0}{y_0+1} \right| = \frac{y_0}{y_0+1} > 1$

ovvero $\log \left| \frac{y_0}{y_0+1} \right| > 0$

Avremo soluzioni quando

$$\begin{cases} y_0 < -1 \\ \frac{y_0}{y_0+1} < e^{x_0^2/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 < -1 \\ y_0 > (y_0+1) e^{x_0^2/2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 < -1 \\ y_0(1 - e^{x_0^2/2}) > e^{x_0^2/2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 < -1 \\ y_0 < \frac{e^{x_0^2/2}}{1 - e^{x_0^2/2}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 < -1 \\ y_0 < \frac{1}{e^{-x_0^2/2} - 1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -y_0 > 1 \\ -y_0 > \frac{1}{1 - e^{-x_0^2/2}} \end{cases}$$



e) Se $-y_0 > (1 - e^{-x_0^2/2})^{-1}$ trovo asintoti verticali:

$$\begin{aligned} \text{es. } x_0 = 2 \quad y_0 = -10 &\Rightarrow -10 = \frac{c \cdot e^2}{1 - c e^2} \\ &\Rightarrow -10 + 10 c e^2 = c e^2 \\ &\Rightarrow c e^2 (10 - 1) = 10 \\ c &= \frac{10}{9 \cdot e^2} \end{aligned}$$

e quindi $y = \frac{\frac{10}{9e^2} e^{x^2/2}}{1 - \frac{10}{9e^2} e^{x^2/2}}$

e questa ha asintoti in $1 = \frac{10}{9e^2} e^{x^2/2} \quad \frac{x^2}{2} = \log \frac{9e^2}{10}$

$$x_{1,2} = \pm \sqrt{\log \frac{81e^4}{100}}$$

Osserviamo che $x_0 = 2 > \sqrt{\log \frac{81e^4}{100}}$, da cui segue che

$y(x)$ è definita su $]\sqrt{\log \frac{81e^4}{100}}, +\infty[$

b) se $-y_0 < (1 - e^{-x_0^2/2})^{-1}$ allora non trovo asintoti verticali per $y(x)$

(se si prende $x_0 = 0$ e $y_0 < -1$ qualunque, non ci sono mai asintoti verticali)

per esempio $x_0 = 0 \quad y_0 = -10$

$$-10 = \frac{c}{1-c} \quad -10 + 10c = c \quad c = \frac{10}{9}$$

e quindi la sol. è $g(x) = \frac{\frac{10}{9} e^{x^2/2}}{1 - \frac{10}{9} e^{x^2/2}}$

e questa non ha limiti poiché $\frac{10}{9} e^{x^2/2} \rightarrow \frac{10}{9} > 1$
 $\forall x \in \mathbb{R} !!$

OSSERVAZIONE su $\sum_n \frac{1}{n}$

$$\log(1+y) \leq y \quad \forall y \geq -1$$

$\Downarrow$

$$\log\left(1 + \frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$\Downarrow$

$$\log\left(\frac{n+1}{n}\right) \leq \frac{1}{n}$$

$\Downarrow$

$$\log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$$

$$\log(k+1) - \log k \leq \frac{1}{k} \quad k=1, 2, 3, \dots$$

$$k=1 \quad \log 2 - \log 1 \leq 1$$

$$k=2 \quad \log 3 - \log 2 \leq \frac{1}{2}$$

...

$$k=n \quad \log(n+1) - \log n \leq \frac{1}{n}$$

$$\sum_{k=1}^n (\log(k+1) - \log k) \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\Downarrow$$

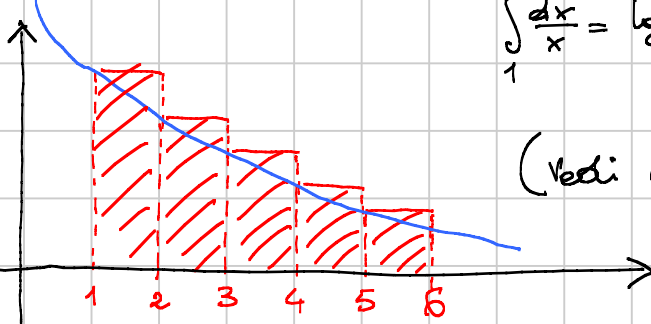
$$\log(n+1) - \log 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = S_n \quad \forall n \geq 1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \log(n+1) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$$

Ne segue che $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty$, ovvero

la serie armonica è divergente e $+\infty$

Graficamente



$$\int_1^6 \frac{dx}{x} = \log 6 = \log(5+1) \leq \sum_{k=1}^5 \frac{1}{k} = 2,21\dots$$

(vedi confronto Tra

Integrale Improprio
e Serie Numerica)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}} dx$$

deve

l'intervallo è illimitato & la funzione integranda non è definita in $x=0$

$$\int_{\boxed{0}}^1 \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}} dx + \int_1^{\boxed{+\infty}} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}} dx$$

$$\textcircled{1} \int_0^1 f(x) dx \quad f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x^2} + x}{\sqrt{1+x^2} + x} = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2} + x)}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{x}} \\ \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} &= \int_0^1 \left(\frac{1}{x}\right)^{1/2} dx \in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \rightarrow 0^+ \\ \text{Thm. confronto} \end{array} \Rightarrow \int_0^1 f(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$\textcircled{2} \int_1^{+\infty} f(x) dx \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2} + x)} = \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{1 + \sqrt{1+x^2}}$$

$$\left. \begin{aligned} f(x) &\sim \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} \cdot \frac{1}{2} \\ \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x}\right)^{3/2} dx &\in \mathbb{R} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} x \rightarrow +\infty \\ \text{Thm. Conq. 1} \end{array} \Rightarrow \int_1^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} f(x) dx \in \mathbb{R}$$