INFINITESIMI E CALCOLO DI LIMITI

1) Data la funzione $f(x) = 1 - 3x + x^3 - x^4 - 3x^6$, verificare che: a) il polinomio di Taylor di ordine 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P_1 = 1 - 3x$; b) quello di ordine 2 è $P_2 = 1 - 3x$; c) quello di ordine 3 è $P_3 = 1 - 3x + x^3$; d) quello di ordine 5 è $P_5 = 1 - 3x + x^3 - x^4$.

3) Date le funzioni $P(x) = 1 + x^2 - 2x^3 + x^5 + o(x^6)$ per $x \to 0$ e $Q(x) = x + x^3 - 3x^4 + o(x^5)$ per $x \to 0$, calcolare: a) $P(x) \cdot Q(x)$; b) $[P(x) + o(x^2)] \cdot Q(x)$; c) $[P(x) + o(x^3)] \cdot [Q(x) + o(x^4)]$; d) $[P(x) + o(x)] \cdot [Q(x) + o(x^2)]$.

4) Calcolare: a) $(x^2 + o(x^2))^3$; b) $\dfrac{o(x^2)}{x}$; c) $o(x^3 + o(x^4))$;
e) $(x - 2x^3 + o(x^3))^2 + (x - 2x^3 + o(x^3))^3$

5) Sviluppare fino all'ordine indicato le seguenti funzioni:
b) $f(x) = e^{x^2} - 1 - \text{sen}^2 x$ fino al 4° ordine ;
c) $f(x) = \log(1 + x^3) + \text{sen}x - x$ fino al 3° ordine.

6)Calcolare ordine e parte principale per $x \to 0$ dei seguenti infinitesimi:
c) $f(x) = \cos x - 1 + \text{tg}x$; d) $f(x) = 2x^2\text{sen}^2x$; e) $f(x) = \text{sen}(\cos x - 1)$; f) $f(x) = (1 + x)^\alpha - 1$;
g) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$; h) $f(x) = \dfrac{1 - \cos(x + x^2)}{\text{sen}^2 x}$; i) $f(x) = \text{sen}(2x^2)\cdot(\sqrt{1 + 3x} - 1)$;

7) Calcolare ordine e parte principale per $x \to \pi/2$ di: $f(x) = \text{sen}(\cos x)$ (Si può usare la Formula di Taylor con il resto di Peano)

8) Calcolare ordine e parte principale per $x \to +\infty$ di: b) $f(x) = \sqrt{\dfrac{x - 3}{x}} - 1$; c) $f(x) = \arctan \dfrac{3}{x^2}$

9) Date $f(x) = (x - \text{sen}x)^2$ e $g(x) = x - \log(1 + x)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) / g(x)$.

10) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

b) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{1 - \cos(x + 1)}{x + 1} \cdot \dfrac{3(x - 1)}{e^{x^2 - 1} - 1}$; c) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \cdot sen\left(\log \dfrac{x + 1}{x + 2}\right)$;

e) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{x\log(1 + x)}{1 - \cos x}\right)^{3-x}$; g) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{2}} \dfrac{senx - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$;

h) $\lim\limits_{x\to +\infty} x \cdot \left(1 - e^{\frac{x}{1+x^2}}\right)$; i) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right)$;

l) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2} - 1 - sen^2 x}{x - senx}$; n) $\lim\limits_{x\to \pi}\left(\dfrac{1}{senx} + (tgx)^{-1}\right)$;

p) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x^2 - sen^2 x}{(1 + 2x^2)^{-1} - \cos 2x}$; s) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2 - 2\cos 3x^2 - senx^3 + \log(1 + x^3)}{e^{2x^4} - 1}$;

11) Determinare il valore del parametro α in modo che il seguente limite sia un numero finito e calcolarne il valore: $\lim\limits_{x\to 0} x^{-2} \cdot (e^{\alpha x} - e^x - x)$

12) Determinare i valori dei parametri a e b in modo che il $\lim\limits_{x\to 0}(x^{-3}\cdot \mathrm{sen}3x + ax^{-2} + b)$ valga 0.

13) Calcolare, al variare del parametro reale α, i seguenti limiti:

a) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{senx}}{x^\alpha}$; b) $\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\dfrac{x}{e^x - 1} + \dfrac{x^\alpha}{x - senx}\right)$; c) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{|x|^\alpha + x^2}$;

d) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{x - senx}{(1-x)^{-1}\cos x - e^x - \dfrac{x^\alpha}{3}}$; e) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{sen(x)^2 - sen^2 x - \dfrac{x^\alpha}{3}}{(1+x^2)\log(1+x^2) - e^{x^2} + 1}$;

RISULTATI:

6) c) ord. 1, p. p. x ; d) ord. 4 , p.p. $2x^4$; e) ord. 2, p.p. – $x^2/2$; f) ord. 1, p.p. αx ; g) ord. 4/3 , p.p. $\dfrac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$; h) ord. 0 , p. p. 1/2 ; i) ord.3 , p.p. $3x^3$; **7)** ord. 1, p.p. – (x - π/2) ; **8)** b) ord. 1, p.p. -3/(2x) ; c) ord. 2 , p.p. $3/x^2$; **9)** ord. 4, p.p. $x^4/18$;
10) b) 3/2 ; c) – 1; e) 8 ; g) – 1/2 ; h) – 1 ; i) 1 ; l) 0 ; n) 0 ; p) 1/10 ; s) 9/2 ; **11)** α = 2 e lim. = 3/2 ; **12)** a = - 3 e b = 9/2 ; **13)** a) 1/6 se α = 3, 0 se α < 3, + ∞ se α > 3; b) 7 se α = 3, 1 se α > 3, + ∞ se α < 3 ; c) 1/4 se α = 2, 1/2 se α > 2, 0 se α < 2; d) + ∞ se α = 3, 0 se α < 3, 1/2 se α > 3; e) 19/30 se α = 4, + ∞ se α < 4, - ∞ se α > 4;

.

POLINOMI DI TAYLOR

1) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ per $f(x) = e^x$

2) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = \pi/4$ per $f(x) = \operatorname{sen} x$

3) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n centrato in $x_0 = 2$ per $f(x) = 1 + 2x - x^4/3 + x^5$

4) Uno sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \dfrac{\log(1+3x)}{2x+1}$ nel punto $x_0 = 0$ è : A) $3x - 3/2\, x^2 + o(x^2)$;
B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) $3x - 21/2\, x^2 + o(x^2)$; D) $3x + 3/2\, x^2 + o(x^2)$.

5) Se una funzione f(x) ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale, allora un suo sviluppo di Taylor centrato in tale punto può essere: A) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$; B) $f(x) = 1 - 5x^2 + o(x^2)$;
C) $f(x) = -3 + 2x^4 + o(x^4)$; D) $f(x) = 1 + 3x^3 + o(x^3)$

6) Studiare il comportamento locale della funzione $f(x) = 1 - (x-2)^2 + 1/4\cdot (x-2)^3 + o((x-2)^3)$ in un intorno del punto $x_0 = 2$, stabilendo in particolare se si tratta di un punto stazionario e in caso affermativo determinarne il tipo.

7) Sono date le funzioni $f(x) = ax + bx^2 + o(x^5)$ per $x \to 0$ e $g(x) = f(\operatorname{sen} x) - ax + 1/3 \cdot (x^2 + x^3)$
con $a, b \in \Re$. Determinare i valori dei parametri a e b per i quali la funzione g(x) ammette in $x_0 = 0$ un punto di massimo locale o un punto di minimo locale o un punto di flesso

11) Approssimare il valore di $e^{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$

12) Approssimare il valore di $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$

13) Dopo aver calcolato il polinomio di Taylor P(x) di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ della funzione
$f(x) = 2\cdot(1+x)^{\frac{1}{3}}$, calcolare il valore di P(1/8) e stimare l'errore commesso.

RISULTATI

1) $\dfrac{e}{6}\left(x^3 + 3x + 2\right) + o((x-1)^2)$;

2) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^2 - \dfrac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^3 + \dfrac{1}{24\sqrt{2}}\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right)^4\right)$;

3) $\dfrac{95}{3} + \dfrac{214}{3}(x-2) + 72(x-2)^2 + \dfrac{112}{3}(x-2)^3 + \dfrac{29}{3}(x-2)^4 + (x-2)^5 + o(x^n)$; **4)** C ; **5)** C ; **6)** $x_0 = 2$ punto di massimo locale; **7)** $b > -1/3$, $\forall a$, $x_0 = 0$ minimo locale; $b < -1/3$, $\forall a$, $x_0 = 0$ massimo locale ; $b = -1/3$, $a \neq 2$, $x_0 = 0$ punto di flesso; $b = -1/3$, $a = 2$, $x_0 = 0$ minimo locale; **11)** 4,11324044 con $n = 3$; **12)** 0,70733…con $n = 5$
13) 2,0800… ; 5/248832 .

INTEGRALI INDEFINITI: ricerca delle primitive

1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

a) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}}dx$; b) $\int \frac{2}{senx}dx$; c) $\int \frac{2x^4+3x^3}{x^2+3}dx$; d) $\int \frac{x+1}{x^2-2x+4}dx$; e) $\int \frac{arctge^x}{e^x+e^{-x}}dx$;

f) $\int \frac{tg^3x+tgx}{tgx+4}dx$; g) $\int xe^x\sqrt{e^x-1}dx$; h) $\int \frac{1}{2sen^2x+3\cos^2x}dx$; i) $\int\left(\frac{1}{\sqrt[4]{5-x}}+\sqrt{5-x}\right)dx$

m) $\int \frac{3\cos x}{3sen^2x+5senx-2}dx$; n) $\int \frac{2x-1}{x^2}\ln x dx$; o) $\int \frac{e^x+e^{4x}}{e^{2x}+1}dx$;

p) $\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2}dx$; q) $\int \frac{x+\sqrt{x-1}}{x-5}dx$; s) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$;

v) $\int \frac{1+x}{\cos^2 x}dx$; w) $\int e^{-\sqrt{x}}dx$.

2) Quale è la funzione f(x) tale che f '(x) = $e^{x^2}\cdot(2x^2+2x+1)$?

(A) $e^{x^2}\cdot(x+1)-2$; (B) $e^{x^2}\cdot(2x^2-2x+3)$;

(C) $e^{x^2}\cdot(2x^3/3+x^2+x)$; (D) nessuna delle precedenti .

3) Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

(A) $\int e^x senxdx=-e^x\cos x+c$; (B) $\int sen\sqrt{x}dx=-\cos\sqrt{x}+c$;

(C) $\int \frac{sen(e^{-x})}{e^x}dx=\cos(e^{-x})+c$; (D) $\int \log xdx = x\log x + c$.

4) Una primitiva della funzione f(x) = $\frac{3x}{(1+x^3)^2}-\frac{x}{1+x^3}$ è :

(A) $\frac{x^2}{1+x^3}$; (B) $\frac{x}{1+x^3}$;

(C) $\frac{x+3}{1+x^3}$; (D) nessuna delle altre risposte è vera.

5) Una primitiva della funzione $(x^3+3x)\cdot e^{2x}$ è:

(A) $\frac{1}{8}(4x^3+6x^2-9x+1)\cdot e^{2x}$; (B) $\frac{1}{8}(4x^3-6x^2+18x-9)\cdot e^{2x}$;

(C) $\frac{1}{8}(4x^3-6x^2-2x+1)\cdot e^{2x}$; (D) nessuna delle precedenti.

6) Una primitiva della funzione f(x) = $\frac{e^{3x}-1}{e^{2x}+1}$ è:

(A); $-1/2\log(e^{2x}+1)-arctg(e^x)+e^x+x$; (B) $(e^{3x}-1)\cdot\log(e^{2x}+1)$;
(C) $-1/2\log(e^{2x}+1)+e^x+x$; (D) $1/2\log(e^{2x}+1)-arctg(e^x)+e^x-x$.

7) Una primitiva di f(x) = (x + 1) · sen(2x) è :

A) –(x+1)cos(2x) ; B) -1/2 · (x+1)cos(2x) ;
C) $(x^2/2+x)sen(2x)$; D) 1/4 · sen(2x) – 1/2 · (x+1)cos(2x) .

8) Trovare la primitiva della funzione f(x) = xsenx + $\cos^2 x$ che si annulla per x = π/2.

RISULTATI

1) a) $2arctg\sqrt{2x-1}+c$; b) $2\log\left|\text{tg}\frac{x}{2}\right|+c$; c) $\frac{2}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-6x-\frac{9}{2}\log(x^2+3)+6\sqrt{3}arctg\frac{x}{\sqrt{3}}+c$;

d) $\frac{1}{2}\log\left(x^2-2x+4\right)+\frac{2}{\sqrt{3}}\text{arctg}\frac{x-1}{\sqrt{3}}+c$; e) $\frac{1}{2}arctg^2 e^x+c$; f) $\text{tgx}-4\log\left|\text{tgx}+4\right|+c$;

g) $\frac{2}{3}\sqrt{e^x-1}\left[e^x\left(x-\frac{2}{3}\right)+\frac{8}{3}-x\right]-\frac{4}{3}arctg\sqrt{e^x-1}+c$; h) $\frac{1}{6}\sqrt{6}\text{arctg}\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\text{tg(x)}\right)+c$;

i) $-\frac{2}{3}\left(2\sqrt[4]{(5-x)^3}+(5-x)\sqrt{5-x}\right)+c$; m) $\frac{3}{7}\log\left|\frac{3senx-1}{senx+2}\right|+c$;

n) $\log^2 x+\frac{1}{x}(\log x+1)+c$; o) $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{2}\log\left(e^{2x}+1\right)+\text{arctg}e^x+c$; p) $\frac{-1}{2(2x+1)}\left[1+\log(2x+1)\right]+c$;

q) $x-1+2\sqrt{x-1}+7\log\left|\sqrt{x-1}-2\right|+3\log\left|\sqrt{x-1}+2\right|+c$;

s) $\frac{1}{2}\text{arcsenx}-\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2}+c$;

v) (1+x)tgx + loglcosxl+c; w) $-2e^{-\sqrt{x}}\left(\sqrt{x}+1\right)+c$.**2)** (A) ; **3)** (C) ; **4)** (A) ; **5)** (B) ; **6)** (D) ; **7)** (D) ; **8)** –xcosx + senx + 1/2 x + 1/4 sen(2x) – 1 - π/4 .

.

NUMERI COMPLESSI:

1) Calcolare il valore di

a) w = $\dfrac{z^2 - \bar{z}^2}{(z+1)(\bar{z}-1)+1}$ quando z = 1 + i ; b) w = $\dfrac{\overline{(iz)} + |z|}{z+i}$ quando z = 3 – 4i ;

e) Se z = 1 - i e w = $\dfrac{|z|^2 - 3i\bar{z}}{iz-1}$, allora: (A) Im(w) = - 5 ; (B) Re(w) = - 5 ; (C) Im(w) = 5 ; (D) Re(w) = 5

2) Dati i numeri v = β + 2i e w = 2 + i, determinare β in modo che risulti Re $\dfrac{v}{w}$ = Im $\dfrac{v}{w}$.

3) Calcolare le seguenti potenze: a) $\left(\sqrt{3} - i\right)^8$; b) $\left(1 - i\sqrt{3}\right)^8$; c) $\left(\cos\dfrac{\pi}{3} - i\,\mathrm{sen}\,\dfrac{\pi}{6}\right)^6$;

d) Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso: z = $\dfrac{\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i\right)^5}{(1-i)^7}$

4) Calcolare e rappresentare graficamente nel piano di Gauss le radici n-esime (nei casi n = 3 e n = 4) di: a) w = 1; b) w = i ; c) w = $-1 - i\sqrt{3}$

5) Determinare le soluzioni in C delle seguenti equazioni:

a) $z^2 - 2iz - 5 = 0$;

b) $z + \bar{z} - \dfrac{1}{\bar{z}} = 0$;

c) $|z| = i - 4z$;

d) $2z^2 - 4iz - (3 + i\sqrt{3}) = 0$;

f) $z^2 \cdot \bar{z}^2 + 2\bar{z}^2 + iz^2 + 2i = 0$;

i) $(2z+3)^3 = -27i$;

l) $z^2 = \bar{z}$; m) $(\bar{z})^3 \cdot z^4 = -2z^2$;

o) $z^3 = \left(-1 + i\sqrt{3}\right) \cdot \bar{z}$;

p) $|z+2| = (\bar{z})^2 - 1$

6) Determinare le soluzioni in C dei seguenti sistemi di equazioni:

a) $\begin{cases} z \cdot \bar{w} = i \\ |z|^2 \cdot w + z = 1 \end{cases}$;

b) $\begin{cases} \left|\dfrac{w}{2}\right| = |z| = \sqrt{2} \\ 2z + w = 4 \end{cases}$;

c) $\begin{cases} |z - (1+3i)| = 2 \\ i\cdot(z+\bar{z}) = z - \bar{z} \end{cases}$;

d) $\begin{cases} z + \bar{z} = -\dfrac{8}{5}|z| \\ \operatorname{Im} z = 2 + \operatorname{Re} z \end{cases}$

e) $\begin{cases} z^2 = -|w|^4 \\ w^2 - (2i+1)w = \dfrac{z+\bar{z}}{3} + 1 - i \end{cases}$;

g) $\begin{cases} \mathrm{z}\cdot(1+|\mathrm{w}|) = -2\mathrm{i} \\ \mathrm{w}\cdot\bar{\mathrm{z}} + (2-\mathrm{iz})\cdot|\mathrm{w}| = |\mathrm{z}|\cdot\mathrm{w} \end{cases}$

i) $\begin{cases} \mathrm{z}+\mathrm{w} = 1+\mathrm{i} \\ (|\mathrm{w}|)^2 + \bar{\mathrm{z}} = 1-\mathrm{i} \end{cases}$;

l) $\begin{cases} \bar{\mathrm{w}}\cdot\mathrm{z} + 1 - \mathrm{i}\sqrt{3} = 0 \\ \mathrm{z}^3\cdot(|\mathrm{z}|)^2 - (\bar{\mathrm{z}})^2\cdot\mathrm{w} = 0 \end{cases}$;

RISULTATI:

1a) -1 + i ; 1b) 2 + i ; 1e) (A) ; 2) $\beta=2/3$; 3a) $2^7\left(-1+i\sqrt{3}\right)$; 3b) $-2^7\left(1+i\sqrt{3}\right)$; 3c) $\dfrac{i}{8}$;

3d) $|z| = 1/8\sqrt{2}$, $\alpha = (23/12)\pi$; 4a) con n = 3: $z_0 = 1$, $z_{1,2} = -\dfrac{1}{2} \pm i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, con n = 4: $z_0 = 1$, $z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$;

4b) con n = 3: $z_{0,1} = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} + i\dfrac{1}{2}$, $z_2 = -i$, con n = 4 : $z_{0,1,2,3} = \cos\left(\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\right) + i sen\left(\dfrac{\pi}{8} + k\dfrac{\pi}{2}\right), k = 0,1,2,3$; 4c) …;

5a) $z2_1 = 2 + i$, $z_2 = -2 + i$; 5b) $z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 5c) $z = -\dfrac{\sqrt{15}}{60} + \dfrac{1}{4}\mathrm{i}$; 5d) $z_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{3}{2}i$, $z_2 = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}i$;
5f) $z_{1,2} = \pm\, \mathrm{i}\sqrt{2}$, $z_{3,4} = \pm\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

5i) $z_1 = -\dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}\mathrm{i}$, $z_2 = \dfrac{-3\sqrt{3}-6}{4} - \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$, $z_3 = \dfrac{3\sqrt{3}-6}{4} - \dfrac{3}{4}\mathrm{i}$; 5l) $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_{3,4} = -\dfrac{1}{2} \pm \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;

5m) $z_1 = 0$, $z_2 = -\sqrt[5]{2}$; 5o) $z_1 = 0$, $z_{2,3} = \pm\sqrt{2}\cdot\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right)$,

$z_{4,5} = \pm\sqrt{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$; 5p) $\frac{1\pm\sqrt{13}}{2}$; 6a) $z = 1/2 + 1/2i$, $w = 1 - i$;

6b) $z_1 = 1 + i$ e $w_1 = 2 - 2i$, $z_2 = 1 - i$ e $w_2 = 2 + 2i$; 6c) $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 3 + 3i$; 6d) $z_1 = -8 - 6i$, $z_2 = -8/7 + 6/7\,i$;

6e) $w_1 = i$ e $z_1 = \pm i$, $w_2 = 1 + i$ e $z_2 = \pm 2i$; 6g) $z = -2i$ e $w = 0$, $z = \frac{-2i}{1+\sqrt{2}}$ e $w = 1 + i$; 6i) $z_1 = 1 + i$ e $w_1 = 0$, $z_2 = i$ e $w_2 = 1$; 6l) $z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(1+i\sqrt{3}\right)$ e $w_1 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(1-i\sqrt{3}\right)$, $z_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-\sqrt{3}+i\right)$ e

$w_2 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(\sqrt{3}+i\right)$, $z_3 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(-1-i\sqrt{3}\right)$ e $w_3 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(-1+i\sqrt{3}\right)$, $z_4 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2}\left(\sqrt{3}-i\right)$ e $w_4 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2}\left(-\sqrt{3}-i\right)$;