

Parallelo Tra

f.m. uniformemente continue
e

successioni di Cauchy

$$u.c. \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad \underbrace{|x-y| < \delta} \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

$$\text{Cauchy} \quad \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} = \bar{n}(\varepsilon) \quad \forall n, m \in \mathbb{N} \quad \underbrace{n, m > \bar{n}} \Rightarrow |Q_n - Q_m| < \varepsilon$$

Lemma

 $\{Q_n\}$ è di Cauchy $\Rightarrow \{Q_n\}$ è limitata

Proviamo per le f.m. u.c. su A

Teorema

 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ f.unif. continua $\Rightarrow f(A)$ limitato

? è vero?

Falso: $f(x) = x$ su $[0, +\infty)$ questa è Lipschitziana
e dunque unif. continua

però

 $f([0, +\infty)) = [0, +\infty)$ che è illimitato

Teorema

 $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ uniformemente continua

+

A limitato

 $\Rightarrow f(A)$ limitato

dimo

per ipotesi $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x-y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$ però δ ci ha che $\exists x_1, \dots, x_n \in A$ t.c. (A limitato!)

$$A \subseteq]x_1 - \delta, x_1 + \delta[\cup]x_2 - \delta, x_2 + \delta[\cup \dots \cup]x_n - \delta, x_n + \delta[\quad ?$$

ovvero $A \subseteq \bigcup_{i=1}^N]x_i - \delta, x_i + \delta[$. Ne segue che

$$\text{per ogni } x \in A \quad \exists i=1, \dots, N : |x - x_i| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_i)| < \varepsilon$$

fisso $\varepsilon=1$, $\exists \delta=\delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < 1$

$$-|f(y)| - 1 \leq f(y) - 1 < f(x) < f(y) - 1 \leq |f(y)| + 1$$

$$|f(x)| \leq |f(y)| + 1$$

in corrispondenza a $\delta \exists x_1, \dots, x_N \in A : A \subseteq \bigcup_{i=1}^N]x_i - \delta, x_i + \delta[$

e dunque $\forall x \in A \quad \exists i=1, \dots, N : |x - x_i| < \delta \Rightarrow |f(x)| \leq 1 + |f(x_i)|$

$$\text{ma } |f(x_i)| \leq \max_{i=1, \dots, N} |f(x_i)|$$

$$\Rightarrow \forall x \in A \quad |f(x)| \leq 1 + \max_{i=1, \dots, N} |f(x_i)|,$$

che è la tesi, ovvero $f(A)$ limitato $\square$

Es: $f(x) = \frac{1}{x}$ è unif. continua su $]0, 1]$?

$$]0, 1] \text{ è limitato} \quad \text{però} \quad f(]0, 1]) = [1, +\infty[$$

che non è limitato

$$\Rightarrow f(x) = \frac{1}{x} \text{ non è u.c. su }]0, 1]$$

$\uparrow$
per il Teorema
precedente

Pb $f(x) = \arctan\left(\log\left(2 + \exp\frac{1}{x}\right)\right)$

su $[1,2]$ è unif continua?

$f(x)$ è composizione di f. ui continue e
 dunque è continua

$[1,2]$ è chiuso e limitato

$\Rightarrow f$ è u.c. su $[1,2]$

Heine Cantor

Esercizio

4

Provare il seguente sistema in $\mathbb{C}$

$$\begin{cases} |z - (1+3i)| = 2 \\ i(z + \bar{z}) = z - \bar{z} \end{cases}$$

dire

1° via : $z = a + ib$ e sostituire (x case)

$$\begin{aligned} 2^{\text{a}} \text{ via : } \forall z \quad z + \bar{z} &= 2 \operatorname{Re} z \\ z - \bar{z} &= 2i \operatorname{Im} z \end{aligned}$$

$$i \cdot (z + \bar{z}) = \boxed{2i \operatorname{Re} z = 2i \operatorname{Im} z} = z - \bar{z}$$

$$\begin{aligned} \text{quindi } z &= a + ia \\ \begin{cases} |z - (1+3i)| = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow |a + ia - 1 - 3i|^2 = (a-1)^2 + (a-3)^2 = 4$$

$$a^2 - 2a + 1 + a^2 - 6a + 9 - 4 = 0$$

$$2a^2 - 8a + 6 = 2(a^2 - 4a + 3) = 2(a-1)(a-3) = 0$$

$$\Rightarrow z_1 = 1 + i \cdot 1 \quad z_2 = 3 + i \cdot 3$$

Esercizio

5

Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} z+w=1+i \\ |w|^2 \bar{z}=1-i \end{cases}$$

dim

$$\begin{cases} 1^o \quad z=x+iy \quad w=a+ib \\ \begin{cases} x+iy+a+ib-1-i=0 \\ a^2+b^2+x-iy-1+i=0 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x+a-1=0 \\ y+b-1=0 \\ a^2+b^2+x-1=0 \\ -y+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x+a-1=0 \\ b=0 \\ a^2+x-1=0 \\ y=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b=0 \\ y=1 \\ \cancel{x+a-1=0} \quad \cancel{-a^2-x+1=0} \\ x+a-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} b=0 \\ y=1 \\ a(1-a)=0 \\ x+a-1=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=0 \\ y=1 \\ a=0 \\ x=1 \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} b=0 \\ y=1 \\ a=1 \\ x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{(1+i; 0) \quad (i; 1)}$$

$$2^o \quad \text{ric} \quad \begin{cases} z+w=1+i \\ |w|^2 \bar{z}=1-i \end{cases} \quad \begin{cases} \bar{z}+\bar{w}=1-i \\ / \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}=1-i-\bar{w} \\ |w|^2+\cancel{x-i-\bar{w}}-\cancel{x+i}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \bar{z}=1-i-\bar{w} \\ \bar{w}(w-1)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{w}=0 \\ \bar{z}=1-i \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} w=1=\bar{w} \\ \bar{z}=1-i-1=-i \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow (1+i, 0) \quad (i, 1)$$

Esercizio

6

Determinare tutte le soluzioni di

$$\begin{cases} 4|z|^2 + \omega^2 = \frac{1}{3} \\ z \frac{\bar{\omega}}{\omega} + 2\bar{z} = i \end{cases} \leftarrow$$

dim

1° via : $z = x + iy \rightarrow \omega = a + ib \dots\dots$ (caso)

2° via $\begin{cases} \omega^2 = \frac{1}{3} - 4|z|^2 \\ \omega^2 \in \mathbb{R} \end{cases}$

$\omega^2 \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \omega = a \in \mathbb{R}$ or $\omega = ib$ $b \in \mathbb{R}$
(uno esclude l'altro!!)

1° caso $\begin{cases} \omega = a = \bar{\omega} \\ 4|z|^2 + a^2 = \frac{1}{3} \\ z + 2\bar{z} = i \end{cases} \begin{cases} // \\ // \\ x + iy + 2x - 2iy - i = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} // \\ // \\ x = 0 \\ y = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \omega = a \\ 4|-i|^2 + a^2 = \frac{1}{3} \\ z = -i \end{cases} \begin{cases} a^2 = \frac{1}{3} - 4 \end{cases}$

impossibile:
 $a \in \mathbb{R}!!$

2° caso $\begin{cases} \omega = ib \\ 4|z|^2 - b^2 = \frac{1}{3} \\ z \cdot \frac{(ib)}{ib} + 2\bar{z} = i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} // \\ // \\ -z + 2\bar{z} - i = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} // \\ // \\ -x - iy + 2x - 2iy - i = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} // \\ // \\ x = 0 \\ y = -\frac{1}{3} \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 4\left|-\frac{i}{3}\right|^2 - b^2 = \frac{1}{3} \\ \omega = ib \\ z = -\frac{i}{3} \end{cases} \begin{cases} b^2 = \frac{4}{9} - \frac{3}{9} = \frac{1}{9} \\ \omega = ib \\ z = -\frac{i}{3} \end{cases}$

$$\Rightarrow \begin{cases} z = -\frac{i}{3} \\ b = \pm \frac{1}{3} \\ \omega = \pm \frac{i}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \left(-\frac{i}{3}, -\frac{i}{3}\right) \text{ e } \left(-\frac{i}{3}, \frac{i}{3}\right)^7$$

Exercitio

Determinare tutte le soluzioni di:

$$\begin{cases} 3z - 2i\bar{z} = \omega \\ 12\omega + 8i\bar{\omega} = (13i + 2z)(13i - 2z) \end{cases}$$

dim

1° modo $z = x + ib$ $\omega = a + ib$ ---

2° modo $\begin{cases} \bar{\omega} = 3\bar{z} + 2iz \\ (3z - 2i\bar{z}) \cdot 12 + 8i(3\bar{z} + 2iz) = -169 - 4z^2 \end{cases}$

$$36z - 24i\bar{z} + 24i\bar{z} - 16z + 169 + 4z^2 = 0$$

$$4z^2 + 20z + 169 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{-10 \pm \sqrt{100 - 676}}{4} = \frac{-10 \pm 24i}{4}$$

$$\frac{169}{4}$$

$$676$$

$$576$$

$$z_1 = -\frac{5}{2} - 6i \quad \omega_1 = 3\left(-\frac{5}{2} - 6i\right) - 2i\left(-\frac{5}{2} + 6i\right)$$

$$= -\frac{15}{2} + 12 + i(-18 + 5)$$

$$z_2 = -\frac{5}{2} + 6i$$

$$\omega_2 = 3\left(-\frac{5}{2} + 6i\right) - 2i\left(-\frac{5}{2} - 6i\right)$$

$$= -\frac{15}{2} - 12 + i(18 + 5)$$

$$3z - 2i\bar{z} = \omega$$

Teorema

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$ continua

$\varphi: J \rightarrow I$ derivabile φ' continua

$I \in \mathbb{R}$ intervallo

$$\Rightarrow \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx = \int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(y) dy$$

Esercizio

Calcolare $\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx$

dim

$$\int_{x=\arcsin t} \sqrt{1-x^2} dx = \left(\int_{t=\arcsin x} \cos^2(t) dt \right)$$

$$= \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t + c \right)_{t=\arcsin x}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \int_{\arcsin 0}^{\arcsin(1)} \cos^2 t dt = \left[\frac{t}{2} + \frac{1}{2} \sin t \cos t \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{4}$$

□

Esercizio

Calcolare $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$$

dim

dall'esercizio precedente

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{Esempio } \int_0^{\pi/2} (\sin^2 x + \cos^2 x) dx = \int_0^{\pi/2} 1 dx = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \cos^2 x dx = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

$\uparrow$
 es. pec.

OSS: Se dovete calcolare $\int_a^b f(t) dt$

1° passo: Trovo $F(t)$ primitiva di f su $[a, b]$

2° passo: Utilizzo Teor. Fond. Calcolo II

$$\int_a^b f(t) dt = \left[F(t) \right]_{t=a}^{t=b} = F(b) - F(a)$$

OSS: $\int_a^b f(t) dt =$ insieme di defi.
 $\int_a^b f(t) dt$, posto che esiste, è un numero

Pb $o(t^\alpha) \rightarrow 0^+ \quad \alpha > 0$

$$\int_0^x o(t^\alpha) dt \stackrel{?}{=} o(x^{\alpha+1}) \text{ per } x \rightarrow 0^+,$$

infatti

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\int_0^x o(t^\alpha) dt}{x^{\alpha+1}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^\alpha)}{(\alpha+1)x^\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{o(x^\alpha)}{x^\alpha}$$

$\uparrow$
 H

$$= \frac{1}{\alpha+1} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^\alpha \cdot o(1)}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha+1} \lim_{x \rightarrow 0^+} o(1) = 0 \quad 10$$

$$\Rightarrow \int_0^x (t^\alpha) dt = o(x^{\alpha+1}) \quad x \rightarrow 0^+$$