# 2014-12-10 - Esercitazioni 9 mercoledì 8.30 - 10.30

**Teorema** (cambio di variabili nei limiti)

$f: A \to \mathbb{R}$ $\quad g: B \to \mathbb{R}$ $\quad \Omega = f^{-1}(f(A) \cap B)$ dominio della f.ne composta $g \circ f$

$x_0$ p.d.a. per $\Omega$, $\quad y_0$ p.d.a. per $f(A) \cap B$

$\exists \lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \qquad \exists \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$

Se vale una delle seguenti ipotesi

i) $\exists \tilde{W} \in \mathcal{J}_{x_0} : f(x) \neq y_0 \quad \forall x \in (\Omega \cap \tilde{W}) \setminus \{x_0\}$

ii) $y_0 \in B$ e $g$ continua in $y_0$

Allora $\lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) \underset{y = f(x)}{=} \lim_{y \to y_0} g(y) = \ell$

dim.

Valga la ii) e prendiamo $x_0, y_0, \ell \in \mathbb{R}$. Per la ii) $g(y_0) = \ell$

$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \Leftrightarrow \forall \rho > 0 \ \exists \delta = \delta(\rho, x_0) > 0 : \forall x \in \Omega \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - y_0| < \rho$

$\lim_{y \to y_0} g(y) = g(y_0) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho = \rho(\varepsilon, y_0) > 0 : \forall y \in B \quad |y - y_0| < \rho \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$$\begin{cases} \forall \rho > 0 \ \exists \delta = \delta(\rho, x_0) > 0 : \forall x \in \underset{f^{-1}(f(A) \cap B)}{\Omega} \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x) - y_0| < \rho \\ f(x) \in B \end{cases} \\ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho > 0 : \forall y \in B \quad |y - y_0| < \delta \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \end{cases}$$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho = \rho(\varepsilon, y_0) \ \exists \delta = \delta(\rho, x_0) > 0 : \forall x \in \Omega \quad 0 < |x - x_0| < \delta$

$\Rightarrow |f(x) - y_0| < \delta \ \& \ f(x) \in B \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$

$\Downarrow$

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in \Omega \quad 0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$

Valga la i)

$$\begin{cases} \forall V \in \mathcal{J}_{y_0} \ \exists W \in \mathcal{J}_{x_0} : x \in (W \cap \Omega) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V & \lim_{x \to x_0} f = y_0 \\ \forall U \in \mathcal{J}_\ell \ \exists V \in \mathcal{J}_{y_0} : y \in (V \cap B) \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(y) \in U & \lim_{y \to y_0} g = \ell \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall V \in \mathcal{J}_{y_0} \ \exists W \in \mathcal{J}_{x_0} : x \in (W \cap \Omega) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V \cap B \\ \forall U \in \mathcal{J}_\ell \ \exists V \in \mathcal{J}_{y_0} : y \in (V \cap B) \ y \neq y_0 \Rightarrow g(y) \in U \end{cases}$$

Per la i) $\exists \tilde{W} : \forall x \in \tilde{W} \cap \Omega \setminus \{x_0\} \ f(x) \neq y_0$

$$\begin{cases} \forall V \in \mathcal{J}_{y_0} \ \exists W_1 = W \cap \tilde{W} \in \mathcal{J}_{x_0} : x \in (\Omega \cap W_1) \setminus \{x_0\} \Rightarrow f(x) \in V \cap B \ f(x) \neq y_0 \\ \forall U \in \mathcal{J}_\ell \ \exists V \in \mathcal{J}_{y_0} : y \in (V \cap B) \ y \neq y_0 \Rightarrow g(y) \in U \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \ \exists V \in \mathcal{J}_{y_0} \ \exists W_1 \in \mathcal{J}_{x_0} : x \in (\Omega \cap W_1) \setminus \{x_0\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \in V \cap B \quad f(x) \neq x_0 \Rightarrow g(f(x)) \in U$$

$$\Downarrow$$

$$\forall U \in \mathcal{J}_\ell \quad \exists W_1 \in \mathcal{J}_{x_0} \quad x \in (\Omega \cap W_1) \setminus \{x_0\} \Rightarrow g(f(x)) \in U \quad \blacksquare$$

# FUNZIONI LIPSCHITZIANE

**Def**

$f : A \to \mathbb{R}$ diciamo che "$f$ è lipschitziana su $A$"

se $\exists L > 0 : \ |f(x) - f(y)| \leq L|x-y| \quad \forall x, y \in A$

**Esempio** $f(x) = x^2$ è lipschitziana su $[0,2]$

dim

$$|f(x) - f(y)| = |x^2 - y^2| = |(x-y)(x+y)| \leq |x-y| \cdot |x+y| \leq 4 \cdot |x-y|$$

dunque $\exists 4 > 0$ t.c.

$$\forall x, y \in [0,2] \qquad |x^2 - y^2| \leq 4|x-y|$$

$$\begin{matrix} 0 \leq x \leq 2 \\ 0 \leq y \leq 2 \end{matrix} \Rightarrow 0 \leq x+y \leq 4 \Rightarrow |x+y| \leq 4 \quad \blacksquare$$

**Esempio** $f(x) = 7x+3$ è Lipschitziana su $\mathbb{R}$

**dim**

$$|f(x)-f(y)| = |7x+\cancel{3}-7y-\cancel{3}| = 7\cdot|x-y|$$

prendo $L=7$ ed ho la Tesi ∎

**Oss:** $f$ è Lipschitziana su $A$ significa

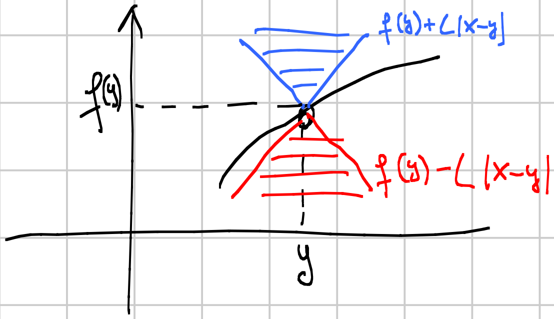
$\forall x,y \in A \quad |f(x)-f(y)| \le L\,|x-y|$

$$\Updownarrow$$

$$-L|x-y| \le f(x)-f(y) \le L|x-y|$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{f(y)-L|x-y|}_{\text{segmenti di rette}} \le f(x) \le \underbrace{f(y)+L|x-y|}$$




ovvero

$$-L \le \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \le L$$

quindi il grafico non può entrare nelle zone tratteggiate

Per trovare una f.ne non Lipschitziana, dovrò cercare una funzione che non soddisfa le limitazioni precedenti.

**Controesempio** (f.ne non Lipschitziana)

$f(x) = \sqrt{x}$ non è Lipschitziana su $[0,1]$

**dim**

Voglio provare che non $\left(\exists L>0 : \forall x,y \in [0,1] \quad |\sqrt{x}-\sqrt{y}| \le L|x-y|\right)$

ovvero

non $\left(\exists L>0 : \forall x,y \in [0,1] \ x\ne y \quad \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} \le L\right)$

ovvero

$\forall L>0 \quad \exists x_L, y_L \in [0,1] \ x_L \ne y_L \quad \frac{|\sqrt{x_L}-\sqrt{x_L}|}{|x_L-y_L|} > L$

ovvero

$$\sup_{\substack{x,y\in[0,1]\\ x\ne y}} \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} = +\infty$$

Ma ora

$$\frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} = \frac{|\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}}|}{|(\cancel{\sqrt{x}-\sqrt{y}})(\sqrt{x}+\sqrt{y})|} \geq \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$$

Ora si ha che $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{n}}+\sqrt{\frac{1}{n^2}}} = +\infty$

$$\Rightarrow \sup_{\substack{x,y\in[0,1] \\ x\neq y}} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = +\infty \Rightarrow \sup_{\substack{x,y\in[0,1] \\ x\neq y}} \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} = +\infty \quad \boxed{W}$$

OSS: $f$ continua $\forall x \in A \not\Rightarrow f$ Lipschitziana su $A$

(vedi $\sqrt{x}$ che è continua su $[0,1]$ non è ivi lipschitziana)

vale però il viceversa

Teorema ($f$ Lipschitz su $A \Rightarrow f$ continua $\forall x \in A$)

$f : A \to \mathbb{R}$, $f$ Lipschitziana su $A$

Allora $f$ continua $\forall x \in A$

dim

fisso $x_0 \in A$ qualsiasi: debbo provare $f$ continua in $x_0$

ovvero

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

Ma $\forall x, x_0 \in A \qquad |f(x) - f(x_0)| \leq L\,|x - x_0| \underset{|x-x_0|<\delta}{<} L\cdot\delta$

Quale è il legame tra $\varepsilon$ e $\delta$ ??

$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0 : \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta = \frac{\varepsilon}{L} \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ $\boxed{W}$

OSS: $\delta = \delta(\varepsilon)$ nel caso di $f$ Lipschitziana

OSS $f : A \to \mathbb{R}$ t.c. $|f(x) - f(y)| \leq 2 \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A$

$$\Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq 3 \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A$$

C'è quindi il problema, per ora aperto, di determinare la costante minima $L_m$ per cui $f$ soddisfa

$$|f(x) - f(y)| \leq L_m \cdot |x - y| \quad \forall x, y \in A$$

**Oss** Se cambio il dominio di una f.ne Lipschitziana $f: A \to \mathbb{R}$, chiaramente si cambia la costante di Lipschitz minimale infatti,

$$L_m(A) = \sup_{\substack{x,y\in A \\ x\neq y}} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|}$$

Se prendo $B \subsetneq A$, in generale $L_m(B) \le L_m(A)$

# PUNTI FISSI

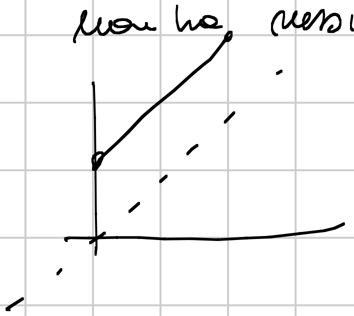
**Def (punto fisso)**

Data una funzione $f: A \to B$, un punto $x_0 \in A$ si dice "punto fisso per $f$" se $f(x_0) = x_0$

**Oss** Dire che esiste $x_0 : f(x_0) = x_0$ significa, graficamente, dire che il sistema $\begin{cases} y = f(x) \\ y = x \\ x \in A \end{cases}$ ha soluzioni

**Esempio** Data $f: [0,2] \to [0,2]$ $f(x) = x$ questa ha $\infty$ punti fissi

**Controesempio** Data $f: [0,2] \to [1,3]$ $f(x) = x+1$ questa non ha nessun punto fisso



**Teorema (delle contrazioni - Banach Caccioppoli)**

$f: [a,b] \to [a,b]$, $f$ Lipschitziana con costante $L < 1$

Allora $\exists!\, x_0 \in [a,b] : f(x_0) = x_0$

*dim*

Proviamo l'unicità: se esistessero $x_1 \neq x_0$ t.c. $f(x_1) = x_1$ ed $f(x_0) = x_0$ allora $|f(x_0) - f(x_1)| = |x_0 - x_1| \le L \cdot |x_0 - x_1|$

ma $L<1 \Rightarrow |x_0-x_1| < |x_0-x_1|$ ASSURDO

Proviamo l'esistenza

$$\begin{cases} x_0 \in [a,b] \\ x_{n+1} = f(x_n) \end{cases} \qquad \boxed{x_0 \text{ è } \forall \text{ in } [a,b]}$$

Voglio provare che $\{x_n\}$ è di Cauchy

$$|x_{n+1}-x_n| = |f(x_n)-f(x_{n-1})| \le L|x_n-x_{n-1}| = L|f(x_{n-1})-f(x_{n-2})|$$

$$\le L^2|x_{n-1}-x_{n-2}| = L^2|f(x_{n-2})-f(x_{n-3})| \le L^3|x_{n-2}-x_{n-3}|$$

$$\dots \le L^n \cdot |x_1-x_0|$$

$\Downarrow$

$$|x_n-x_m| = |(x_n-x_{n-1})+(x_{n-1}-x_{n-2})+(x_{n-2}+\dots-x_{m+1})+(x_{m+1}-x_m)|$$

$$\le |x_n-x_{n-1}|+|x_{n-1}-x_{n-2}|+\dots+|x_{m+1}-x_m|$$

$$\le L^{n-1}\cdot|x_1-x_0| + L^{n-2}\cdot|x_1-x_0|+\dots+L^m\cdot|x_1-x_0|$$

$$= |x_1-x_0|\cdot L^m\left(L^{n-m-1}+L^{n-m-2}+\dots+1\right)$$

$$= |x_1-x_0|\cdot L^m \cdot \frac{1-L^{n-m}}{1-L} \underset{n\to+\infty}{\le} |x_1-x_0|\cdot\frac{L^m}{1-L}$$

quindi $\forall n,m \quad |x_n-x_m| \le |x_1-x_0|\cdot\frac{L^m}{1-L}$

$\forall \varepsilon>0 \; \exists \bar{n}>0 : \forall n,m>\bar{n} \quad |x_n-x_m| < \varepsilon$

e questo succede prendendo $|x_1-x_0|\cdot\frac{L^{\bar{m}}}{1-L} = \varepsilon$

ovvero

$$L^{\bar{m}} = \varepsilon\cdot\frac{1-L}{|x_1-x_0|} \quad \text{ovvero} \quad \bar{m} = \log_L\left(\varepsilon\cdot\frac{1-L}{|x_1-x_0|}\right)$$

Dunque ho provato che $\{x_n\}_n$ è di Cauchy

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = x^* \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x^*$$

dunque $\lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = x^* = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\lim_{n\to+\infty} x_n)$

$\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad\quad$ f continua in $x^*$

$\| \; f(x^*)$

$\Rightarrow x^*$ è punto fisso per $f$ ////

**Esercizio** Studiare $\{x_n\}_n$ definita da

$$\begin{cases} x_0>0 \\ x_{n+1}=f(x_n) \end{cases} \quad \text{con} \quad f(x)=\sqrt[3]{x}$$

dire

Osservo che $f(x)=x \iff x=\sqrt[3]{x} \iff x^3=x$

$\iff x=0,\ x=1,\ x=-1$

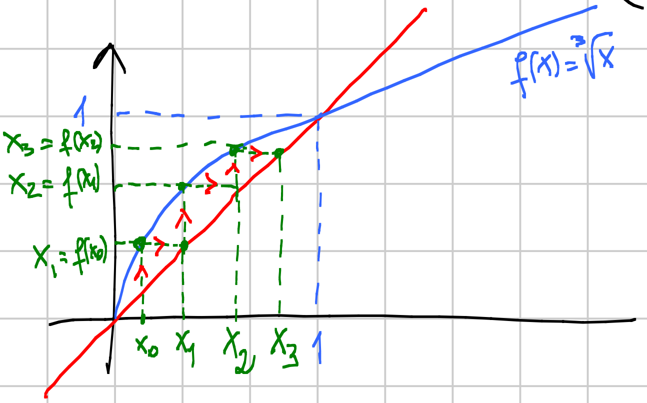
$x>1 \Rightarrow \sqrt[3]{x}>1$

$x>1 \Rightarrow x>\sqrt[3]{x}$

$0<x<1 \Rightarrow 0<\sqrt[3]{x}<1$

$0<x<1 \Rightarrow \sqrt[3]{x}>x$

$f(x)=\sqrt[3]{x}$ è strettamente crescente ($x^3$ è strettamente crescente)




$0<x_0<1$ proviamo che $x_n\in(0,1)\ \forall n$

infatti,

$0<x_1=\sqrt[3]{x_0}<1$

suppongo $0<x_n<1$

voglio provare $0<x_{n+1}<1$

ma $x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n}\in(0,1)$ ?

e questo è vero poiché se $x\in(0,1)$ allora $\sqrt[3]{x}\in(0,1)$

Proviamo che $x_n \uparrow$

$x_0<\sqrt[3]{x_0}=x_1$ vero poiché $x_0\in(0,1)$

suppongo $x_n<\sqrt[3]{x_n}=x_{n+1}$

Essendo $\sqrt[3]{x}$ strettamente crescente si ha

$$x_{n+1}=\sqrt[3]{x_n}<\sqrt[3]{x_{n+1}}=x_{n+2}$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \le 1$$

Ora $\{x_{n+1}\}_n$ è una sottosuccessione e dunque

$$\exists \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell$$

Dovendo essere $x_{n+1} = f(x_n)$ $\forall n \in \mathbb{N}$ si ha

$$\ell = \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{continuità} \\ \text{di } f}}{=} f\left(\lim_{n\to+\infty} x_n\right) = f(\ell)$$

$$\Rightarrow \ell = \sqrt[3]{\ell} \Rightarrow \ell = 1 \text{ in quanto } \{x_n\}\uparrow \text{ e } x_n \le 1 \ \forall n$$

Resta da vedere il caso $x_0 > 1$ : in tal caso si ha

- $x_n > 1$ $\forall n$
- $\{x_n\}$ decrescente

$$\Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_n = \ell \ge 1 \Rightarrow \exists \lim_{n\to+\infty} x_{n+1} = \ell = \lim_{n\to+\infty} f(x_n) = f(\ell)$$

$$\Rightarrow \ell = 1$$

$\blacksquare$

**Esercizio** $f(x) = x^3$ è strettamente crescente su $\mathbb{R}$

dim

$$x^3 < y^3 \iff y^3 - x^3 = (y-x)(y^2+xy+x^2) > 0$$

Dunque $x < y \Rightarrow y - x > 0 \Rightarrow y^3 - x^3 > 0$

in quanto $x^2+xy+y^2 > 0$ quando $x \ne y$

$$\left(\begin{array}{l} x<0<y \text{ o } y<0<x \Rightarrow xy<0 \Rightarrow x^2+y^2+xy = (x+y)^2 - xy \ge -\overset{\wedge}{xy}{}^{0} \\ 0<x<y \text{ o } x<y<0 \Rightarrow x \cdot y > 0 \Rightarrow x^2+y^2+xy = (x-y)^2 + 3xy \ge 3xy > 0 \end{array}\right)$$

$\blacksquare$

**Esercizio** $f(x) = \sqrt[3]{x}$ è una funzione crescente $\forall x \in \mathbb{R}$

dim

Ts $x < y \Rightarrow \sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y}$

Ma $\sqrt[3]{x} < \sqrt[3]{y} \underset{\substack{\uparrow \\ x^3 \text{ è crescente}}}{\iff} (\sqrt[3]{x})^3 < (\sqrt[3]{y})^3 \iff x < y$ da cui la Tesi $\blacksquare$