

$$0,\overline{9} = 1$$

$$\begin{aligned} 0,\overline{23} &= \frac{23}{10^2} + \frac{23}{10^4} + \frac{23}{10^6} + \dots + \frac{23}{10^{2m}} + \dots \\ &= \frac{23}{10^2} \cdot \left(1 + \frac{1}{10^2} + \dots + \frac{1}{10^{2m}} + \dots \right) \\ &= \frac{23}{10^2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10^2}} = \frac{23}{10^2} \cdot \frac{10^2}{99} = \frac{23}{99} \end{aligned}$$

Teorema

$q \in \mathbb{Q} \Rightarrow$ lo sviluppo decimale di q è finito o periodico

Esercizio

$q \in \mathbb{R}$ si consideri $O_n = \sum_{k=1}^n q^k$

1) Calcolare O_n e studiare $\lim_{n \rightarrow +\infty} O_n$ al variare di q

2) Studiare, al variare di q , la convergenza di $\sum_{n=1}^{\infty} (q \cdot O_n)^n$

dim.

$$\begin{aligned} 1) \quad O_n &= \sum_{k=1}^n q^k = \sum_{k=0}^n q^k - 1 = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} - 1 = \frac{q - q^{n+1}}{1 - q} \\ &= q \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \end{aligned}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} O_n = q \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1 - q^n}{1 - q} = \begin{cases} +\infty & q \geq 1 \\ \frac{q}{1 - q} & -1 < q < 1 \\ \nexists & q < -1 \end{cases}$$

$$2) \quad \text{Studio } \sum_{n=1}^{\infty} (q \cdot O_n)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\left(q^2 \cdot \frac{1 - q^n}{1 - q} \right)}_{A_n}^n = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n)^n$$

Studio la conv. assoluta con il criterio della radice n-esimo

$$\sqrt[n]{|A_n|^m} = |A_n| = q^2 \cdot \left| \frac{1-q^n}{1-q} \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \begin{cases} +\infty & q > 1 \\ \frac{q^2}{1-q} & -1 < q < 1 \\ \nexists & q = -1 \\ +\infty & q < -1 \end{cases}$$

$q > 1$ la serie non conv. assolutamente (né semplicemente)

$q < -1$ " " " " " " (" ")

$q = 1$ Non ha senso

$q = -1$ da vedere separatamente

$-1 < q < 1$ da studiare

$$q = -1 \quad \sum_n \left| \frac{1 - (-1)^n}{2} \right|^m = 0 + 1 + 0 + 1 + 0 + 1 + \dots$$

risulta divergente sia assolutamente che semplicemente (è a termini positivi)

Studio il caso $-1 < q < 1$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|A_n|^m} = \frac{q^2}{1-q} < 1 \text{ se } q^2 < 1-q$$

$$\text{se } q^2 + q - 1 < 0 \quad q_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$$

$$\text{se } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < q < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{se } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 \quad \text{e} \quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < 1$$

Donque $\boxed{\text{se}} -1 < q < \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|A_n|^m} < 1$
 allora $\sum_n |A_n|^m$ converge
 allora $\sum_n A_n^m$ "

$$\boxed{\text{se}} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} < q < 1 \text{ allora } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|A_n|^m} > 1$$

$$\text{allora } |A_n|^m \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$$

allora $A_n \not\rightarrow 0$ 3
allora $\sum_n A_n$ non converge

Resta da vedere $q = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$|A_n|^n = \left| \frac{q^2(1-q^n)}{1-q} \right|^n = \left(1 - \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right)^n = A_n^n$$

$$\text{con } \left| \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right| < 1 \Rightarrow (\text{Bin. Bernoulli}) \quad A_n^n \geq 1 - n \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \quad \forall n \geq 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n \geq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left[1 - n \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)^n \right] = +\infty$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n^n \geq 1 \Rightarrow (\text{Cond. Necessaria}) \quad \sum_n A_n^n \text{ diverge}$$

OSS: $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot q^n = 0$ se $|q| < 1$

$$\text{infatti } \sqrt[n]{n \cdot |q|^n} = |q| \cdot \sqrt[n]{n} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} |q| \quad \text{ma } |q| < 1$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n \cdot |q|^n = 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} n q^n = 0 \quad \square$$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n (\log n)^{\log x}$$

diver

$$\Theta_n = (\log n)^{\log x} = e^{\log x \log(\log n)} = x^{\log \log n}$$

per $n \geq 2$

Noi approssimiamo studiare x^n , la serie geometrica

Quando $\alpha > 1$, $\alpha^{\log \log n}$ è crescente 4

$$\text{infatti } \alpha^{\log \log n} < \alpha^{\log \log(n+1)} \quad \forall n \geq 2$$

$$\text{dunque } \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha^{\log \log n} \geq \alpha^{\log \log 2} > 0$$

$\Rightarrow$ (per la C.N.) la serie non converge

$$\text{Quando } \alpha = 1 \quad \text{Trovo } \sum_{n \geq 2} 1 \Leftrightarrow \{S_n\}_n = \{n-1\}_{n \geq 2}$$

e quindi la serie diverge a $+\infty$

$$\text{Quando } 0 < \alpha < 1 \text{ allora } \log \alpha < 0$$

e dunque la mia serie diventa

$$\sum_n \left(\frac{1}{\log n} \right)^p \quad \text{con } p = -\log \alpha > 0$$

$$Q_n = e^{\log \alpha (\log \log n)} = \left(\frac{1}{\log n} \right)^p \geq \frac{1}{n} \quad (*)$$

$$\text{(IDEA } (\log n)^p \ll n \quad \forall p > 0)$$

$$\text{e dunque } \left(\frac{1}{\log n} \right)^p \gg \frac{1}{n} \quad \forall p > 0)$$

Per provare (*) possiamo considerare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{1/(\log n)^p}$

e provare che questo limite è 0 $\forall p > 0$

$$\text{e infatti } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1/n}{(1/\log n)^p} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(\log n)^p}{n} = 0$$

$$\text{e dunque } \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} - \varepsilon \frac{1/n}{(1/\log n)^p} < \varepsilon$$

e dunque $\varepsilon = 1 \exists \bar{m} : \forall n > \bar{m} \quad \frac{1}{n} < \left(\frac{1}{\log n}\right)^{\beta} \quad \square$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \left[n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) + (2+\alpha)^{-2n} \right] \text{ al variare di } \alpha > 0$$

dive

$$a_n = n \operatorname{sen} \left(\frac{1}{n^\alpha} \right) + \left[\left(\frac{1}{2+\alpha} \right)^2 \right]^n$$

$$= b_n + c_n$$

Se $\sum_n b_n$ e $\sum_n c_n$ convergono allora $\sum_n a_n$ converge

ed essendo $a_n, b_n, c_n \geq 0$ vale anche il viceversa. Dunque studieremo

$$\underbrace{\sum_n n \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha}}_{(1)} \quad \text{e} \quad \underbrace{\sum_n \left[\left(\frac{1}{2+\alpha} \right)^2 \right]^n}_{(2)}$$

$$(1) \quad b_n = n \operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha} \quad \downarrow \quad n \cdot \frac{1}{n^\alpha} = \frac{1}{n^{\alpha-1}} = B_n \quad n \rightarrow +\infty$$

$$\left(\text{infatti } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{n^\alpha}} = 1 \in]0, +\infty[\right)$$

ma $\sum_n B_n$ converge se $\alpha - 1 > 1$ se $\alpha > 2$

dunque $\sum_n b_n$ converge se $\alpha > 2$

(per il Teorema Confronto Asintotico)

$$(2) \quad c_n = \left[\left(\frac{1}{2+\alpha} \right)^2 \right]^n \quad \sum_n c_n \text{ converge se } \left(\frac{1}{2+\alpha} \right)^2 < 1$$

$$\text{se } (2+\alpha)^2 > 1 \quad \text{se } \alpha^2 + 4\alpha + 3 > 0$$

$$\alpha_{1,2} = -2 \pm \sqrt{1}$$

$$\text{se } \alpha < -3 \quad 0 \quad -1 < \alpha$$

6

① e ② convergono se $\alpha \in]2, +\infty[\cap (]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[)$

$$\text{se } \alpha \in]2, +\infty[$$

III

Esercizio

Data $\{Q_n\}_n$ t.c. $-5 \leq Q_n \leq 3 \quad \forall n$

allora

- 1) $\max \{Q_n\} = 3$ **VoF** 3) $-5 \leq |Q_n| \leq 3$ **VoF**
 2) $Q_n Q_{n+1} \leq 25$ **VoF** 4) $\inf Q_n = -5$ **VoF**

dim

1) è false $Q_n = \sin n$ è un controesempio
 poiché $-5 < \sin n < 3$ ma $\sup(\sin n) = 1 < 3$

2) $-5 \leq Q_n \leq 3 \Rightarrow |Q_n| \leq \max\{|-5|, |3|\} = 5$
 (VERA) $\Rightarrow Q_n \cdot Q_{n+1} \leq |Q_n| \cdot |Q_{n+1}| \leq 5 \cdot 5 = 25$

3) preso $\{Q_n\}_n = \{-4\}_n$ questa è t.c. $|Q_n| > 3$
 e quindi è falsa

4) preso $\{Q_n\}_n = \{0\}_n$ questa è t.c. $\min Q_n = 0 > -5$
 quindi è falsa

Esercizio

Studiare la convergenza di $\sum_n \binom{3n}{n}^{-1}$

dim

$$Q_n = \frac{1}{\binom{3n}{n}} = \frac{n! (2n)!}{(3n)!}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{a_{m+1}}{a_m} &= \frac{(m+1)! (2m+2)!}{(3m+3)!} \cdot \frac{(3m)!}{m! (2m)!} = \\
 &= \frac{(m+1) \cdot \cancel{m!} \cdot (2m+2) \cdot (2m+1) \cdot \cancel{(2m)!}}{(3m+3)(3m+2)(3m+1) \cancel{(3m)!}} \cdot \frac{\cancel{(3m)!}}{\cancel{m!} \cancel{(2m)!}} \\
 &= \frac{(1+\frac{1}{m})(2+\frac{2}{m})(2+\frac{1}{m})}{(3+\frac{3}{m})(3+\frac{2}{m})(3+\frac{1}{m})} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \frac{4}{27} < 1
 \end{aligned}$$

Per il Criterio Rapporto, la serie converge $\square$

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\sum_n \frac{3^n + 5^n}{n!}$$

di cui

① (per ora) Provare che $\frac{3^n + 5^n}{n!} \sim \frac{5^n}{n!} \quad n \rightarrow +\infty$

e quindi studiare $b_n = \frac{5^n}{n!}$

② modo: con la formula di Stirling $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq ne \left(\frac{n}{e}\right)^n$

$$\Rightarrow \left(\frac{e}{n}\right)^n \geq \frac{1}{n!} \geq \frac{1}{ne} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

$$\Rightarrow \underbrace{\left(\frac{e}{n}\right)^n \cdot (3^n + 5^n)}_{b_n} \geq \frac{3^n + 5^n}{n!} \geq \underbrace{\frac{3^n + 5^n}{ne}}_{c_n} \cdot \left(\frac{e}{n}\right)^n$$

Essendo serie a termini positivi è sufficiente provare che $\sum_n b_n$ converge

$$\sqrt[n]{\left(\frac{e}{n}\right)^n \cdot (3^n + 5^n)} = \frac{5 \cdot e}{n} \sqrt[n]{1 + \left(\frac{3}{5}\right)^n} \leq \frac{5 \cdot e}{n} \cdot \sqrt[n]{2}$$

$$\text{e si ha } 0 \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{5 \cdot e}{n} \cdot \sqrt[n]{2} \Rightarrow \cdot$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{b_n} = 0 \Rightarrow \sum_n b_n \text{ converge}$$

8

$\Rightarrow$ converge la serie di partenza 

Esercizio Studiare la convergenza di
 $\sum_n (-1)^n \cdot n^\alpha \cdot \text{sen} \frac{1}{n} = \sum_n a_n$ al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$
 dim

• Convergenza assoluta: $|a_n| = n^\alpha \text{sen} \frac{1}{n}$
 e si ha $|a_n| \sim \frac{1}{n^{1-\alpha}} \quad n \rightarrow +\infty \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

e si ha che $\sum_n \frac{1}{n^{1-\alpha}}$ converge se $\alpha < 0$

$\Rightarrow$ (Criterio del confronto) $\sum_n |a_n|$ converge

Non converge assolutamente quando $0 < \alpha \leq 1$!!

•• Quando $\alpha \geq 1$ si ha $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \text{sen} \frac{1}{n} \neq 0$
 e dunque la serie non converge poiché
 non è soddisfatta la condizione necessaria!

per la convergenza semplice

•• Resta da vedere che succede quando $0 \leq \alpha < 1$

La serie risulta di termini di segno alterno

$$- \lim_{n \rightarrow +\infty} n^\alpha \text{sen} \frac{1}{n} = 0 \quad \forall \alpha < 1$$

$$- n^\alpha \text{sen} \frac{1}{n} > 0 \quad \forall n \geq 1 \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$$

$$- (n+1)^\alpha \text{sen} \frac{1}{n+1} \leq n^\alpha \text{sen} \frac{1}{n} \quad \forall n \geq 1 \quad ???$$

$$\frac{d}{dx} \left(x^\alpha \text{sen} \frac{1}{x} \right) = \alpha x^{\alpha-1} \cdot \text{sen} \frac{1}{x} + x^\alpha \cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right)$$

$$= x^{\alpha-2} \left(\alpha \text{sen} \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x} \right)$$

$$= x^{\alpha-2} \cdot \cos \frac{1}{x} \left(\alpha \text{Tg} \frac{1}{x} - 1 \right)$$

$$\text{e quando } x \rightarrow +\infty \Rightarrow \frac{1}{x} \rightarrow 0^+ \Rightarrow \alpha \text{Tg} \frac{1}{x} \rightarrow 0^+$$

$$\Rightarrow \alpha \text{Tg} x - 1 < 0 \text{ def.} \Rightarrow \exists M > 0: x^\alpha \text{sen} \frac{1}{x} \downarrow \quad \forall x > M$$

$$\Rightarrow \exists M = [M] + 1: n^\alpha \text{sen} \frac{1}{n} \downarrow \quad \forall n > M$$

Per il criterio di Leibniz la serie converge 

9

N.B.: Non abbiamo ancora fatto le
derivate, quindi il caso $0 \leq \alpha < 1$
va inteso come osservazione