

Esercizio Calcolare, se esiste, $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$

dove $Q_n: \begin{cases} Q_0 = \frac{1}{2} \\ Q_{n+1} = \frac{1}{2 + Q_n} \end{cases} \quad n \geq 0$

dim

$\{Q_n\}_n$ non è monotona

Consideriamo
$$Q_{2m} = \frac{1}{2 + Q_{2m-1}} = \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + Q_{2m-2}}} = \frac{2 + Q_{2m-2}}{5 + 2Q_{2m-2}}$$

$$Q_{2m+1} = \frac{2 + Q_{2m-1}}{5 + 2Q_{2m-1}}$$

Analizziamo le suddivisioni $b_n = Q_{2n}$ e $c_n = Q_{2n+1}$

$$\begin{cases} b_0 = \frac{1}{2} \\ b_{n+1} = \frac{2 + b_n}{5 + 2b_n} \end{cases}$$

$$b_n \geq 0 \quad \forall n \quad (\text{ovvio})$$

$b_n \downarrow$ (decrescente)

$$b_0 = \frac{1}{2} > b_1 = \frac{5/2}{5+1} = \frac{5}{12}$$

$$b_n < b_{n-1} \quad (\text{ip. induttiva})$$

Voglio provare $b_{n+1} < b_n$

$$b_{n+1} = \frac{2 + b_n}{5 + 2b_n} < b_n \quad \text{\$ suff.}$$

$$2 + b_n < 5b_n + 2b_n^2 \quad \text{\$ suff.}$$

$$2b_n^2 + 4b_n - 2 = 2(b_n^2 + 2b_n - 1) > 0 \quad \text{\$ suff.}$$

Per provare la decrescenza di b_n è necessario provare che $(b_n^2 + 2b_n - 1) > 0$

$$-1 \pm \sqrt{2} \text{ sono le sol. di } z^2 + 2z - 1 = 0$$

Il Trinomio è > 0 per valori esterni all'intervallo $[-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}]$

ma $a_n \geq 0$, dunque è necessario che $b_n > -1+\sqrt{2}$

Devo provare che $b_n > -1+\sqrt{2} \quad \forall n \geq 0$

$$b_0 = \frac{1}{2} > -1+\sqrt{2} ? \quad \text{Sì!}$$

$b_n > -1+\sqrt{2}$ (Hip. induttiva)

Voglio provare che $b_{n+1} > -1+\sqrt{2}$

$$\text{ma } b_{n+1} = \frac{2+b_n}{5+2b_n} > -1+\sqrt{2} \quad \S$$

$$\text{questo equivale a } 2+b_n > -5+5\sqrt{2}-2b_n+2\sqrt{2}b_n$$

$$\begin{array}{lll} \text{"} & \text{"} & \text{"} \end{array} \quad b_n(3-2\sqrt{2}) > 5\sqrt{2}-7$$

$$\begin{array}{lll} \text{"} & \text{"} & \text{"} \end{array} \quad b_n > \frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}}$$

$$\text{ma } b_n > -1+\sqrt{2}$$

$\uparrow$ Hip. induttiva

$$\text{Quindi è sufficiente provare } -1+\sqrt{2} \geq \frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}}$$

$$-3+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}-4 \geq 5\sqrt{2}-7$$

• Ricorrendo

$$\begin{array}{l} b_n > -1+\sqrt{2} \quad \forall n \geq 0 \\ b_n \downarrow \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = L = \inf_n \{b_n\} \geq -1 + \sqrt{2} \quad 3$$

$$\Rightarrow l \in \mathbb{R} \Rightarrow \text{possiamo porre al limite in } b_{n+1} = \frac{2+b_n}{5+2b_n}$$

$$\text{e scopro } \lim_{n \rightarrow +\infty} b_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2+b_n}{5+2b_n}$$

$$\text{e quindi } l_p = \frac{2+l_p}{5+2l_p} \text{ che ha sol. } l_1 = -1 + \sqrt{2}$$

$$l_2 = \cancel{-1 - \sqrt{2}}$$

$$\text{quindi } \boxed{l_p = -1 + \sqrt{2}}$$

Passiamo a studiare $\{c_n\}_n = \{a_{2n+1}\}_n$
(rattorciamoci e ti posto dopo)

$$\text{Proviamo } c_n < -1 + \sqrt{2} \quad \forall n$$

Per induzione

$$c_1 = \frac{2}{5} < -1 + \sqrt{2} \quad \text{OK}$$

$$\text{Supponiamo } c_n < -1 + \sqrt{2} \quad (\text{h.p. induttiva})$$

$$\text{Voglio provare } c_{n+1} < -1 + \sqrt{2}$$

$$" \quad " \quad \frac{2+c_n}{5+2c_n} < -1 + \sqrt{2}$$

$$" \quad " \quad 2+c_n < -5+5\sqrt{2}-2c_n+2\sqrt{2}c_n$$

$$" \quad " \quad 7-5\sqrt{2} < c_n(2\sqrt{2}-3)$$

$$" \quad " \quad \frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}} > c_n$$

$$\text{ma } -1 + \sqrt{2} > c_n \quad (\text{è l'ipotesi induttiva}) \text{ e quindi}$$

$$\text{è sufficiente provare che } \frac{5\sqrt{2}-7}{3-2\sqrt{2}} \geq -1 + \sqrt{2} : \text{ma questo}$$

è una uguaglianza, e quindi è vero!

Ora posso dimostrare che $C_n \uparrow$ 4

Per induzione

$$C_1 = \frac{2}{5} < C_2 = \frac{2 + \frac{2}{5}}{5 + \frac{4}{5}} = \frac{12}{5} \cdot \frac{5}{29} = \frac{12}{29} \quad \underline{\text{VERO}}$$

(H.p. induttiva) $C_{n-1} < C_n$

Voglio provare $C_n < \frac{2 + C_n}{5 + 2C_n} = C_{n+1}$

" " $5C_n + 2C_n^2 < 2 + C_n$

" " $2(C_n^2 + 2C_n - 1) < 0$

Ma questo è vero se $C_n \in]-1-\sqrt{2}, -1+\sqrt{2}[$

e che è vero poiché $0 \leq C_n < -1+\sqrt{2}$
↑ abbiamo provato in precedenza

$C_n \uparrow$, $C_n < -1+\sqrt{2}$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n = l_d = \sup \{C_n\} \leq -1+\sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} C_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2 + C_n}{5 + 2C_n} \Rightarrow l_d = \frac{2 + l_d}{5 + 2l_d}$$

$$\Rightarrow l_d \text{ soddisfa l'eq. } l_d^2 + 2l_d - 1 = 0$$

$$\text{ma } l_d \geq 0 \Rightarrow l_d = -1 + \sqrt{2}$$

Infine

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{2n} = -1 + \sqrt{2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} C_n$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = -1 + \sqrt{2}$$



Esercizio Calcolate $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$ dove

5

$$Q_n : \begin{cases} Q_0 = 1 \\ Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{Q_n^2} \end{cases}$$

dim

$$Q_0 = 1 < Q_1 = 2 < Q_2 = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4} < Q_3 = \frac{9}{4} + \frac{16}{81}$$

Si osserva che $Q_n \uparrow$ in fatti

$$Q_{n+1} = Q_n + \frac{1}{Q_n^2} > Q_n \quad \forall n \geq 0$$

(meglio si dovrebbe provare prima che $Q_n \geq 1 \quad \forall n$)

$$\Rightarrow \exists l = \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = \sup \{Q_n\}$$

(Q_n è monotono)

Questo l può essere $\begin{cases} \text{finito} \\ +\infty \end{cases}$

Se $l \in \mathbb{R}$ allora $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_{n+1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(Q_n + \frac{1}{Q_n^2} \right)$

ovvero $l = l + \frac{1}{l^2}$ che NON ha soluzioni in $\mathbb{R}$

$$\Rightarrow l = +\infty \quad \boxed{\text{III}}$$

Esercizio Calcolate $\lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n$ dove $Q_n = \sqrt{n} - \sqrt{n-1}$

dim

È una forma indeterminata $\infty - \infty$

la strategia è trasformare questa Q_n in modo da evitare l'indeterminazione

$$Q_n = (\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \cdot \frac{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}{(\sqrt{n} + \sqrt{n-1})}$$

$$a_n = \frac{n - (n-1)}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} = \frac{1}{\sqrt{n} + \sqrt{n-1}} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0^+ = \left(\frac{1}{+\infty}\right)$$

6

Esercizio Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}}$ con Stirling
dim

Stirling $\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq (ne) \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \quad \forall n \geq 3$

$$\frac{1}{n} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} \leq \sqrt[n]{ne} \cdot \sqrt[n]{\left(\frac{n}{e}\right)^n} \cdot \frac{1}{n}$$

$$\underbrace{\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{e}}_{\downarrow n \rightarrow +\infty} \leq \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} \leq \underbrace{\frac{1}{e} \cdot \sqrt[n]{ne}}_{\downarrow n \rightarrow +\infty}$$

$\Rightarrow$ (per 2 carabinieri) $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n!}{n^n}} = \frac{1}{e}$ 

Esercizio Trovare che $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \uparrow$ (cresce
dim monotonicamente)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cdot \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{\overbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-k+1)}^{k \text{ fattori}}}{k!} \cdot \frac{1}{n^k} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot \frac{1}{k!} \\ \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} &= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \frac{1}{k!} + \binom{n+1}{n+1} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} \end{aligned}$$

e si ha $\binom{n}{k} \leq \frac{n+1}{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) < 1 - \frac{1}{n+1}$; $\left(1 - \frac{2}{n}\right) < 1 - \frac{2}{n+1}$; ...; $\left(1 - \frac{k-1}{n}\right) < \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right)$

e dunque $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \sum_{k=0}^n \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} < \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \frac{1}{(n+1)^k} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right)$$

$$S_n = \sup_{k \geq n} a_k \quad \text{e} \quad \downarrow$$

$$\text{in fatti, } \{a_k : k \geq n\} \supseteq \{a_k : k \geq m\} \quad \text{se } m > n$$

$$\therefore \sup \{a_k : k \geq n\} \geq \sup \{a_k : k \geq m\} \quad \text{se } m > n$$

$$\text{se } m > n \quad \text{allora} \quad S_m \leq S_n$$

$$\Rightarrow \exists \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \inf \{S_n\} = \inf_n \sup_{k \geq n} a_k$$

(Teorema successivo monotone)

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n \stackrel{\text{Def}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{k \geq n} a_k$$

--- (analogamente a prima)

$$= \sup_{m \in \mathbb{N}} \inf_{k \geq m} a_k$$

SS: Quando $a_n \rightarrow a$ e $b_n \rightarrow b$ si deve

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

perché non fosse indeterminato
il membro di destra

però non sempre i limiti di $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ esistono, e quindi si introducono il $\limsup$ / $\liminf$

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n)$ esiste sempre (finito o $+\infty$)

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n$ " " (" ")

$\limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$ " " (" ")

Ma $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \stackrel{?}{=} \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$

è ancora vera ???

La risposta, in generale, è NO!

Controesempio $\exists \{a_n\}, \{b_n\}$ tali che
 $\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) < \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$

$$a_n = (-1)^n \quad b_n = (-1)^{n+1}$$

$$a_n + b_n = 0 \quad \forall n \Rightarrow \limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} (-1)^k = 1$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{k \geq n} (-1)^{k+1} = 1$$

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0 < 2 = \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

In generale vale il $\leq$, come si prova nell'esercizio che segue

Esercizio Provare che
di cui

$$\limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) \leq \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

9

$$a_k + b_k \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k \quad \forall k \geq n$$

$$\Downarrow$$

$$\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \leq \sup_{k \geq n} a_k + \sup_{k \geq n} b_k$$

Ma queste son tutte successioni monotone in n , quindi esistono i limiti e si ha

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq n} (a_k + b_k) \right) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq n} a_k \right) + \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sup_{k \geq n} b_k \right)$$

Esercizio Provare che, se $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = a \in \mathbb{R}$

$$\text{allora } \limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = a + \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n$$

$B \in \mathbb{R}$

di cui

Per ipotesi: $\forall \varepsilon > 0 \exists n_1 > 0 : \forall n > n_1, \quad a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$

$$\left[\begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists n_2 > 0 : \forall n > n_2 \quad b_n < B + \varepsilon \\ \exists \infty \text{ indici} \quad B - \varepsilon < b_n \end{array} \right]$$

$$\text{per } \bar{n} = n_1 \vee n_2$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \left\{ \begin{array}{l} a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \\ b_n < B + \varepsilon \end{array} \right.$$

$$\exists \infty \text{ indici} : \quad B - \varepsilon < b_n$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n}$$

$$\exists \infty \text{ indici}$$

$$a_n + b_n < B + a + 2\varepsilon$$

$$B - \varepsilon + a - \varepsilon < a_n + b_n$$

Segue $\exists \limsup_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = B + a$
 $= \limsup_{n \rightarrow +\infty} b_n + a$ $\square$

Criterio della radice n-esima

$$\{Q_n\}_n \quad Q_n \geq 0$$

i) $\limsup \sqrt[n]{Q_n} < 1$ allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = 0$

ii) $1 < \liminf \sqrt[n]{Q_n}$ allora $\exists \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$

in generale

$$\liminf \sqrt[n]{Q_n} \leq \limsup \sqrt[n]{Q_n}$$

dimo

i) suppongo che $L = \limsup_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{Q_n} < 1$ ($\epsilon \geq 0$)

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) > 0 : \forall n > \bar{n} \quad \sqrt[n]{Q_n} < L + \epsilon$$

$$\exists \infty \text{ indici} : L - \epsilon < \sqrt[n]{Q_n}$$

$$\Rightarrow \forall \epsilon > 0 \quad \exists \bar{n} = \bar{n}(\epsilon) > 0 : \forall n > \bar{n} \quad \sqrt[n]{Q_n} < L + \epsilon$$

con $L < 1$

$$L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2}$$

soglio ϵ : $L + \epsilon < 1$ ovvero $\epsilon = \frac{1-L}{2}$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{1-L}{2} \quad \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad \sqrt[n]{Q_n} < L + \frac{1-L}{2} = \frac{1+L}{2}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \frac{1-L}{2} \quad \exists \bar{n} > 0 : \forall n > \bar{n} \quad Q_n < \left(\frac{1+L}{2}\right)^n$$

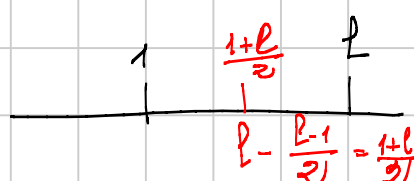
ed ora $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+L}{2}\right)^n = 0$ perché $\frac{1+L}{2} \in [0,1[$

e dunque

$$\begin{array}{ccc} 0 < Q_n < \left(\frac{1+L}{2}\right)^n & \forall n > \bar{n} \\ \downarrow n \rightarrow +\infty & & \downarrow n \rightarrow +\infty \\ 0 & & 0 \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = 0$$

$$\text{ii) } l = \liminf_{n \rightarrow +\infty} Q_n > 1$$

$$\begin{array}{l} 1 < l < +\infty \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall \varepsilon > 0 \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad l - \varepsilon < \sqrt[n]{Q_n} \\ \exists \infty \text{ indici : } \sqrt[n]{Q_n} < l + \varepsilon \end{array} \right. \\ 1 < l < +\infty \end{array}$$


$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{l-1}{2} \quad \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \frac{1+l}{2} = l - \varepsilon < \sqrt[n]{Q_n}$$

$$\Rightarrow \quad \quad \quad \left(\frac{1+l}{2}\right)^n < Q_n$$

$$\text{dunque } \left\{ \begin{array}{l} \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad \left(\frac{1+l}{2}\right)^n < Q_n \\ \text{ma } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1+l}{2}\right)^n = +\infty \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow \text{(teorema Confronto)} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Q_n = +\infty$$

$$l = +\infty \Rightarrow \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad 2 < \sqrt[n]{Q_n}$$

$$\Rightarrow \exists \bar{n} : \forall n > \bar{n} \quad 2^n < Q_n$$

e si conclude come nel caso precedente $\square$