Esercizio (Disuguaglianza di Young)

Provare che $\forall x,y \geq 0$ $\forall p,q > 1$ t.c. $1/p + 1/q = 1$ si ha

$$xy \leq \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

dim

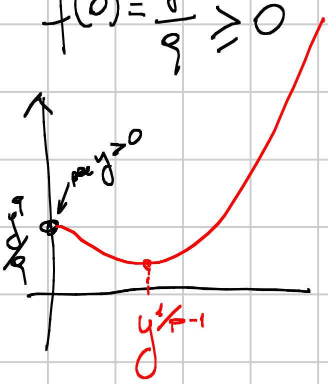
quando $p=q=2$ questo diventa

$$xy \leq \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \iff x^2+y^2 \geq 2xy \iff (x-y)^2 \geq 0$$

$$f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy$$ al variare del parametro $y \geq 0$

$$f(0) = \frac{y^q}{q} \geq 0 \qquad \lim_{x\to+\infty} f(x) = \frac{y^q}{q} + \lim_{x\to+\infty} x\left(\frac{x^{p-1}}{p} - y\right)$$

$$= \frac{y^q}{q} + (+\infty)(+\infty) = +\infty$$



$$f' = \frac{df}{dx} = \frac{p x^{p-1}}{p} - y = x^{p-1} - y$$

$f'(x) = 0$ se $x^{p-1} = y$ se $x = y^{1/p-1}$

$$f'(x) = \begin{cases} <0 & 0 < x < y^{1/p-1} \\ >0 & y^{1/p-1} < x \end{cases} \Rightarrow \bar{x} = y^{1/p-1}$$ p.to di minimo assoluto

$$\Rightarrow f(x) \geq f(\bar{x}) = \frac{\left(y^{1/p-1}\right)^p}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{1/p-1} \cdot y$$

$$\overset{(*)}{=} \frac{y^q}{p} + \frac{y^q}{q} - y^{\frac{1+p-1}{p-1}}$$

$$\overset{(*)}{=} y^q\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right) - y^q = y^q - y^q = 0$$

$$\Rightarrow f(x) = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} - xy \geq 0 \quad \forall x,y \geq 0 \quad \forall p,q \geq 1$$

$1/p + 1/q = 1$

$$(*) \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \iff \frac{1}{q} = 1 - \frac{1}{p} \iff \frac{1}{q} = \frac{p-1}{p} \iff q = \frac{p}{p-1}$$

Esercizio

$\forall x,y>0 \quad \forall p\geq 1 \qquad x^p+y^p \leq (x+y)^p \leq 2^{p-1}(x^p+y^p)$

dim

Questa disuguaglianza è in 2 variabili, però è omogenea e $y>0$, dunque dividendo tutto per y^p si trova $\left(t=\frac{x}{y}\right)$

$\Leftrightarrow \forall t>0 \quad \forall p\geq 1 \qquad t^p+1 \leq (t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p+1)$

$\Leftrightarrow \quad " \quad " \qquad 1 \leq \underbrace{\frac{(t+1)^p}{t^p+1}}_{f(t)} \leq 2^{p-1}$

Studio $f(t)$ su $]0,+\infty[$

$f(0)=1=\lim_{t\to 0} f(t) \qquad \lim_{t\to+\infty} f(t) = \lim_{t\to+\infty} \frac{t^p}{t^p}=1$

$$f'(t)=\frac{p(t+1)^{p-1}\cdot(t^p+1)-(t+1)^p\cdot p\cdot t^{p-1}}{(t^p+1)^2} = \frac{p(t+1)^{p-1}}{(t^p+1)^2}\cdot\left(\cancel{t^p}+1-\cancel{t^p}-t^{p-1}\right)$$

$$=\frac{1-t^{p-1}}{(t^p+1)^2}\cdot p\cdot(t+1)^{p-1}=0 \underset{t>0}{\Longleftrightarrow} 1=t^{p-1} \Leftrightarrow \boxed{t=1}$$

$$f'(t)=\begin{cases} >0 & 0<t<1 \\ <0 & 1<t\end{cases} \Rightarrow t=1 \text{ p.to di max assoluto}$$

$$f(1)=\frac{(1+1)^p}{1^p+1}=2^{p-1}$$

Dunque

$$\inf f(]0,+\infty[)=1=\lim_{t\to 0} f(t)=\lim_{t\to+\infty} f(t) \leq f(t) \leq 2^{p-1}=f(1)=\max f(]0,+\infty[)$$

$\square$

Esercizio

Provare che $\quad \arctg x + \arctg \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2} \qquad \forall x>0$

$\arctg x + \arctg \frac{1}{x} = -\frac{\pi}{2} \qquad \forall x<0$

dim

Si può risolvere l'esercizio calcolando

$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arctg}\, b = \ldots$

$$\mathrm{Tg}(\alpha+\beta) = \frac{\mathrm{sen}\,\alpha\cos\beta + \mathrm{sen}\,\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \mathrm{sen}\,\beta\,\mathrm{sen}\,\alpha} = \frac{\mathrm{Tg}\,\alpha + \mathrm{Tg}\,\beta}{1-\mathrm{Tg}\,\alpha\,\mathrm{Tg}\,\beta}$$

$\Rightarrow \alpha+\beta = \mathrm{arctg}\left(\frac{\mathrm{Tg}\,\alpha + \mathrm{Tg}\,\beta}{1-\mathrm{Tg}\,\alpha\,\mathrm{Tg}\,\beta}\right)$ e posto $\alpha = \mathrm{arctg}\, a$
$\beta = \mathrm{arctg}\, b$

$\mathrm{arctg}\, a + \mathrm{arctg}\, b = \mathrm{arctg}\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$ e dunque

$$\mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, 1/x = \mathrm{arctg}\left(\frac{x+1/x}{\underbrace{1-1}}\right) = \begin{cases} \pi/2 & x>0 \\ -\pi/2 & x<0 \end{cases}$$

↑ devo fare un limite ....

Più semplicemente $f(x) = \mathrm{arctg}\, x + \mathrm{arctg}\, 1/x$

f è derivabile $\forall x \neq 0$ e si ha

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} + \frac{1}{1+\left(1/x\right)^2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2} - \frac{\cancel{x^2}}{x^2+1}\cdot\frac{1}{\cancel{x^2}} = 0$$

$\Rightarrow \quad f = c_1 \quad \forall x>0$

$\qquad f = c_2 \quad \forall x<0$

$\Rightarrow \quad f(x) = \mathrm{arctg}\, 1 + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{1} = \frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} \quad \forall x>0$

$\qquad f(x) = \mathrm{arctg}\,(-1) + \mathrm{arctg}\,\frac{1}{-1} = -\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} \quad \forall x<0$

$\blacksquare$

Esercizio

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ t.c. $f'(x) \geq 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

Allora $\exists \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \quad \exists \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

dim

$x, y \quad y > x \qquad \dfrac{f(y) - f(x)}{y - x} = f'(z_{x,y}) \geq 1 \quad z_{x,y} \in]x, y[$

$y > 0 \qquad \dfrac{f(y) - f(0)}{y} = f'(z_x) \geq 1$

$y > 0 \quad f(y) - f(0) \geq y$

$y > 0 \quad f(y) \geq f(0) + y \Rightarrow \lim_{y \to +\infty} f(y) \geq \lim_{y \to +\infty} (f(0) + y) = +\infty$

$y < 0 \qquad \dfrac{f(y) - f(0)}{y} \geq 1$

$y < 0 \qquad f(y) - f(0) \leq y$

$y < 0 \qquad f(y) \leq f(0) + y$

$\Rightarrow \lim_{y \to -\infty} f(y) \leq \lim_{y \to -\infty} (f(0) + y) = -\infty$ $\boxed{\text{cvd}}$

Esercizio

Data la funzione $f(x) = 2\log x - 5\,\operatorname{arctg} x$, se ne determini
1 - dominio 2 - limiti agli estremi del dominio
3 - regioni di monotonia 4 - max e min locali e assoluti
se ne tracci un grafico approssimativo

Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il n.ro di soluzioni di $f(x) = k$

dim

$f = 2\log x - 5\,\operatorname{arctg} x$ Dominio (f) = Dominio $(\log x) =]0, +\infty[$

$$\lim_{x \to 0^+} f = \lim_{x \to 0^+} 2\log x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f = \lim_{x \to +\infty} 2\log x = +\infty$$

f è definita su $]0,+\infty[$ ed è derivabile con derivata continua: per studiare la monotonia studierò il segno di f'

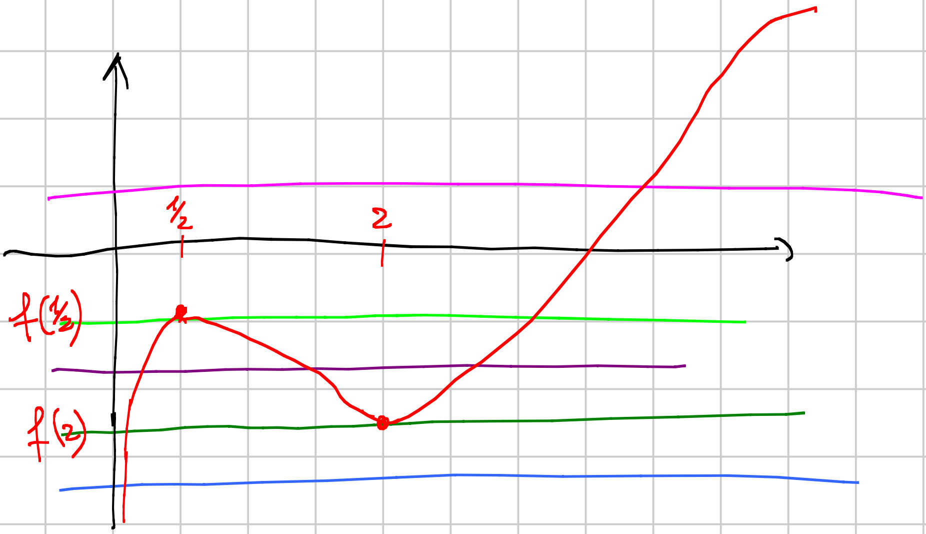
$$f' = \frac{2}{x} - \frac{5}{1+x^2} = \frac{2+2x^2-5x}{x(1+x^2)} = 0 \iff 2x^2 - 5x + 2 = 0$$

$$\iff x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25-16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4} \begin{cases} 1/2 = x_1 \\ 2 = x_2 \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & 0 < x < 1/2 \\ < 0 & \frac{1}{2} < x < 2 \\ > 0 & 2 < x \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = \text{p.to max rel.} \\ x_2 = \text{'' min rel.} \end{array}$$

$$f(x_1) = 2\log\frac{1}{2} - 5\,\operatorname{arctg}\frac{1}{2} < 0$$

$$f(x_2) = 2\log 2 - 5\,\operatorname{arctg} 2 < f(x_1) < 0$$



$f(]0,\tfrac{1}{2}[) =]-\infty, f(\tfrac{1}{2})[$ $\qquad f([\tfrac{1}{2},2]) = [f(2), f(\tfrac{1}{2})]$

$f(]2,+\infty[) =]f(2), +\infty[$

voglio il n.ro di soluzioni di $f(x)=k$

$k < f(2) \Rightarrow \begin{cases} y=f(x) \\ y=k \end{cases}$ ha <u>1! sola</u> soluz. reale

poiché $y=k$ interseca il grafico in 1 solo ramo

$k = f(2) \Rightarrow f(x)=k$ ha 2 soluzioni

$k \in]f(2), f(\tfrac{1}{2})[\Rightarrow f(x)=k$ ha 3 soluzioni

$k = f(\tfrac{1}{2}) \Rightarrow f(x)=k$ ha 2 soluzioni

$k > f(\tfrac{1}{2}) \Rightarrow f(x)=k$ ha 1! soluzioni ///

Esercizio

Determinare, al variare di $a \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni di

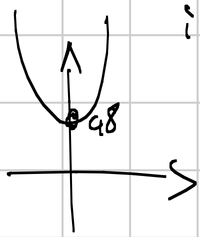
$$f(x) = 3x^4 + 4ax^3 - 12a^2x^2 + 48 = 0$$

dim

$f(0) = 48 \quad \forall a$

Se $a = 0$ allora $f(x) = 0$ NON HA SOLUZIONI

in quanto $f(x) = 3x^4 + 48 \geq 48 > 0$

$a = 0$ 

Se $a \neq 0$ devo vedere (calcolare?) i minimi di $f(x)$

$$f' = 12x^3 + 12ax^2 - 24a^2x = 12x(x^2 + ax - 2a^2) = 0$$

$$f' = 0 \iff x_1 = 0 \vee x_{2,3} = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 + 8a^2}}{2} = \frac{-a \pm 3|a|}{2}$$

$$\iff x_1 = 0 \vee x_2 = \frac{-a - 3|a|}{2} \vee x_3 = \frac{-a + 3|a|}{2}$$

$a > 0$ $\quad x_1 = 0$ p.to max rel.

$x_2 = -2a$

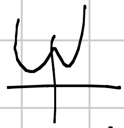
$x_3 = a$

$\Rightarrow f(0) = 48$ max rel.

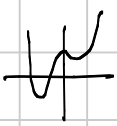
$f(-2a) = 3(-2a)^4 + 4a(-2a)^3 - 12a^2(-2a)^2 + 48 =$ min rel.

$= a^4(48 - 32 - 48) + 48 = -32a^4 + 48$

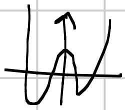
$f(a) = 3 \cdot a^4 + 4a^4 - 12a^4 + 48 = -5a^4 + 48$ min rel.

1° caso $\quad 0 < f(-2a) < f(a) \Rightarrow \emptyset$ soluz. 

$0 = f(-2a) < f(a) \Rightarrow 1$ soluzione 

$f(-2a) < 0 < f(a) \Rightarrow 2$ sol. 

$f(-2a) < f(a) = 0 \implies 3$ soluz. 

$f(-2a) < f(a) < 0 \implies 4$ soluz. 

Il caso $a<0$ è simmetrico

Esercizio

Calcolare $\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h}$

f derivabile 2 volte su $\mathbb{R}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0-h)}{3h}$

$\lim_{h\to 0} \dfrac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2}$

dim

è forma indet. $0/0$

x_0 è fissato

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h)}{t(h)}$$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{g'(h)}{t'(h)} = \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)\cdot(-1)}{1}$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(f'(x_0+h)+f'(x_0-h)\right) = 2f'(x_0)$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)+f(x_0-h)-2f(x_0)}{h^2} \overset{(H)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f'(x_0+h)-f'(x_0-h)}{2h}$$

forma indet. $0/0$

forma indeterminata $0/0$

$$\overset{(H)}{=} \lim_{h\to 0} \frac{f''(x_0+h)+f''(x_0-h)}{2} = f''(x_0)$$