

Oss:

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \boxed{1+(-1)} + \boxed{1+(-1)} + 1+(-1)+1+(-1)+1+\dots = 0+0+\dots=0$$

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = 1 + \boxed{(-1)+1} + \boxed{(-1)+1} + \boxed{(-1)+1} + (-1)+1+\dots = 1+0+0+\dots=1$$

$$2S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n =$$

$$= 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+\dots$$

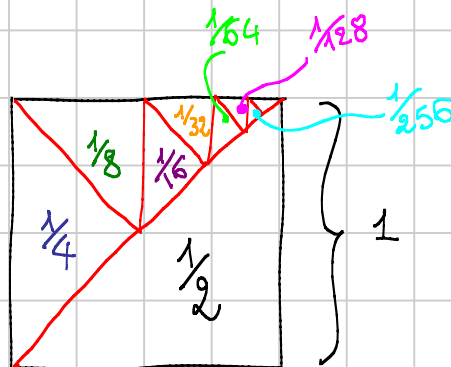
$$+ 1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+(-1)+1+\dots$$

$$= 1+0+0+0+0+\dots$$

$$= 1$$

$$\Rightarrow S = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n = \frac{1}{2}$$

Oss:

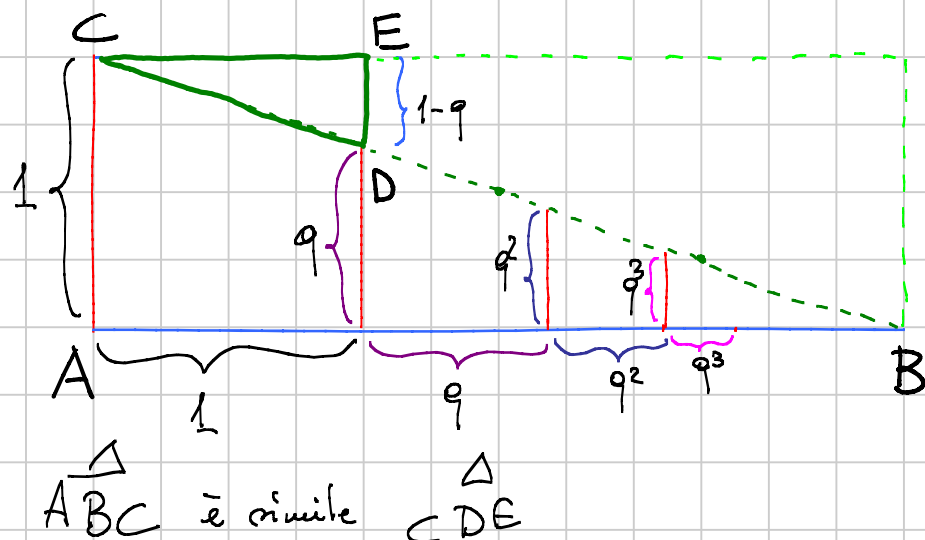


$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots = 1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

Oss:

2



$$\Rightarrow 1:(1-q) = (1+q+q^2+\dots+q^n+\dots):1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$$

pono che $\alpha q < 1$

Esercizio

Esercizio

Dato la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

prova che f è derivabile in $x_0=0$ ma
 $f'(x)$ non è continua in $x_0=0$
 dim

f continues in $x_0 = 0$ in fact,

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \text{ sec } \frac{1}{x} = (\text{infinitesimale}) \cdot (\text{limitate}) = 0$$

Calcolo $f'(0)$ utilizzeremo la definizione

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h^2 \cdot \sec \frac{1}{h}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} h \cdot \sec \frac{1}{h} = 0$$

L'Hopital's Rule

Calcolo $f'(x)$ per $x \neq 0$:

$$f'(x) = \left(x^2 \sec \frac{1}{x} \right)' = 2x \sec \frac{1}{x} + x^2 \left(\sec \frac{1}{x} \right)'$$

$$= 2x \sec \frac{1}{x} + x^2 \left(\cos \frac{1}{x} \cdot \left(-\frac{1}{x^2} \right) \right)$$

$$f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 2x \sin \frac{1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \cos \frac{1}{x}$$

questo
limite
~~non~~

Oss ho utilizzato il thm di derivazione delle funzioni composte

$$\frac{d}{dx}(g \circ f)(x) = \frac{dg}{dy}(f(x)) \cdot \frac{df}{dx}(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

$$g(y) = \sin y \quad f(x) = \frac{1}{x} = x^{-1}$$

$$g'(y) = \cos y \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{e quindi}$$

$$g'(f(x)) \cdot f'(x) = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

Esercizio Calcolare la retta tangente al grafico di $f(x) = \tan x$ nel punto $\left(\frac{\pi}{4}, f\left(\frac{\pi}{4}\right)\right)$

dove

$$\text{dove calcolare } y - f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

dove calcolare $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} \\ &= \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \end{aligned}$$

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2$$

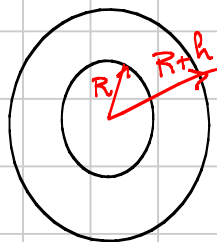
dunque l'eq. della retta tangente è

4

$$y - 1 = 2 \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

III

OSS: $f(R) = \pi R^2$ area cerchio raggio R



$$\frac{f(R+h) - f(R)}{h} = \frac{\pi(R+h)^2 - \pi R^2}{h}$$

$$= \frac{\pi h^2 + 2\pi R h}{h} = 2\pi R + \pi h \xrightarrow{h \rightarrow 0} 2\pi R$$

↑
lung. circonferenza

$$g(R) = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$g'(R) = \frac{4}{3} \pi \cdot 3R^2 = 4\pi R^2$$

↑
area della
superficie
sferica

Esercizio

Calcolare la derivata utilizzando la definizione di

$$f(x) = e^x$$

$$g(x) = x^n \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

dire

$f = e^x$ voglio calcolare $f'(x_0) \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} e^{x_0} \cdot \frac{e^h - 1}{h} \\ &= e^{x_0} \cdot \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^{x_0} \end{aligned}$$

$$f(x) = e^x \longrightarrow f'(x) = e^x$$

$g(x) = x^m$ per $m \geq 0$ (per $m < 0$ utilizzo la derivata 5 di $\frac{1}{f(x)}$!)

$m=0$

$$g'(x_0) = (1)' = 0 \quad \forall x_0 \in \mathbb{R}$$

$m=1$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = 1$$

$m=2$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{2x_0 h + h^2}{h} = 2x_0$$

$m=3$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^3 - x_0^3}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\cancel{x_0^3} + \binom{3}{1} x_0^2 h + \binom{3}{2} x_0 h^2 + \cancel{h^3} - \cancel{x_0^3}}{h}$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \binom{3}{1} \cdot x_0^2 + \left[\binom{3}{2} x_0 h + h^2 \right] = \binom{3}{1} x_0^2 = 3x_0^2$$

$\boxed{m}$

$$g'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^m - x_0^m}{h} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\cancel{x_0^m} + \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} x_0^{m-k} \cdot h^k - \cancel{x_0^m} \right)$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \sum_{k=1}^m \binom{m}{k} \cdot x_0^{m-k} \cdot h^{k-1} =$$

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left\{ \binom{m}{1} \cdot x_0^{m-1} + \left[\binom{m}{2} x_0^{m-2} h + \dots + \binom{m}{m} h^m \right] \right\}$$

$$= \binom{m}{1} x_0^{m-1} = m x_0^{m-1}$$

$$m < 0$$

6

$$g(x) = x^m = \frac{1}{x^{-m}} \quad e \quad -m > 0$$

dunque

$$g'(x) = \left(\frac{1}{x^{-m}} \right)' = - \frac{(x^{-m})'}{x^{-2m}} \stackrel{\text{per il punto precedente}}{=} - \frac{-m \cdot x^{-m-1}}{x^{-m \cdot 2}} = m \cdot x^{m-1}$$

$$g(x) = x^m \longrightarrow g'(x) = m \cdot x^{m-1} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \forall m \geq 0$$

$$\longrightarrow g'(x) = m \cdot x^{m-1} \quad \forall x \neq 0 \quad \forall m < 0$$



Legge della ^{regola della} derivata e crescenza/decrescenza

Oss : la derivata è un concetto "locale"
la monotonia " " " " "globale"

Pb : $f: I \rightarrow \mathbb{R}$, I intervallo, f derivabile $\forall x \in I$
 f è crescente strettamente su $I \Rightarrow f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in I$
(decrescente)

dim

prendo $x_0 \in I$ f crescente strettamente

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \begin{cases} > 0 & x < x_0 \\ > 0 & x > x_0 \end{cases} \begin{pmatrix} f(x) - f(x_0) < 0 \\ x - x_0 < 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(x) - f(x_0) > 0 \\ x - x_0 > 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \geq 0 \quad \boxed{III}$$

Oss: Non può essere > 0 infatti,

$f(x) = x^3$, questa è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$

$f(x) = x^3$ è crescente strettamente su $\mathbb{R}$

$$\text{Ma } f'(0) = 0$$

Teorema ($f'(x_0) > 0 \Rightarrow f \uparrow$ in $U \in \mathcal{I}_{x_0}$)

$f: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, f derivabile in x_0
 f continua su I

Se $f'(x_0) > 0$ allora $\exists \delta > 0$: $f(x) \begin{cases} < f(x_0) & x_0 - \delta < x < x_0 \\ > f(x_0) & x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$

Per ipotesi $\exists$ ^{diver} $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) > 0$

$\Rightarrow$ (teorema precedente regio) $\exists \delta > 0$: $\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\}$$

ma se $x_0 - \delta < x < x_0$ allora $\begin{cases} x - x_0 < 0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$

allora $f(x) - f(x_0) < 0$

me se $x_0 < x < x_0 + \delta$ allora $\begin{cases} x - x_0 > 0 \\ \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0 \end{cases}$

allora $f(x) - f(x_0) > 0$

Riassumendo

$$f(x) \begin{cases} < f(x_0) & \text{se } x_0 - \delta < x < x_0 \\ > f(x_0) & \text{se } x_0 < x < x_0 + \delta \end{cases}$$



"o piccolo"

Def (infinitesimi)

Dato $f: I \rightarrow \mathbb{R}$ $x_0 \in I$ diciamo che

$f(x) = o(1; x_0)$ " f è un o piccolo di 1 per x che tende a x_0 "

se $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$

Esempio

$$f(x) = \log x = o(1; 1)$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \log x = 0$$

$$g(x) = \log(1+x) = o(1; 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \log(1+x) = 0$$

$$h(x) = (x-3)^4 = o(1; 3)$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x-3)^4 = 0$$

Oss: $f = o(1; x_0)$ è un caso particolare della definizione successiva

Def ($\neq o(8)$)

67

$$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}, \quad x_0 \in I, \quad f = o(1; x_0) \text{ e } g = o(1; x_0)$$

diciamo che $f = o(g; x_0)$ " f è un o piccolo di g per $x \rightarrow x_0$ "

$$\text{oe } f(x) = g(x) \cdot o(1; x_0)$$

$$\text{Oss: } x^3 = o(1; 0) \quad \log(1+x) = o(1; 0)$$

$$x^4 = o(1; 0)$$

$$x^5 = o(1; 0)$$

ovvero $o(1; 0)$ è un insieme di funzioni
sarebbe più corretto scrivere $x^3 \in o(1; 0)$

Esempi

$$x^3 = o(x; 0) \quad \text{infatti} \quad x^3 = x^2 \cdot x = o(1; 0) \cdot x$$

perché $x^2 = o(1; 0)$

$$x^2 = o(x; 0) \quad \text{infatti} \quad x^2 = x \cdot x = o(1; 0) \cdot x$$

perché $x = o(1; 0)$

$$x^3 = o(x^2; 0) \quad \text{infatti} \quad x^3 = x \cdot x^2 = o(1; 0) \cdot x^2$$

perché $x = o(1; 0)$

Esempi

$$\sin x = x + o(x; 0)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2; 0)$$

di cui

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin x}{x} - 1 \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\sin x - x}{x} = o(1; 0)$$

$$\Rightarrow \text{sen } x - x = x \cdot o(1; 0) \underset{\text{Def}}{=} o(x; 0)$$

$$\Rightarrow \text{sen } x = x + o(x; 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} - \frac{1}{2} \right) = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1 - \cos x - \frac{x^2}{2}}{x^2} = o(1; 0)$$

$$\Rightarrow 1 - \cos x - \frac{x^2}{2} = x^2 \cdot o(1; 0) \underset{\text{Def}}{=} o(x^2; 0)$$

$$\Rightarrow \cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2; 0)$$

↑ proprietà da verificare

Teorema (caratterizzazione di o piccolo)

$f, g: I \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in I$, $f = o(1; x_0)$ e $g = o(1; x_0)$

$g \neq 0 \forall x \in I$ sono equivalenti

$$1) f = o(g; x_0)$$

$$2) \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$