Teorema (Bolzano)

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f continua $\forall x\in[a,b]$, $f(a)f(b)<0$

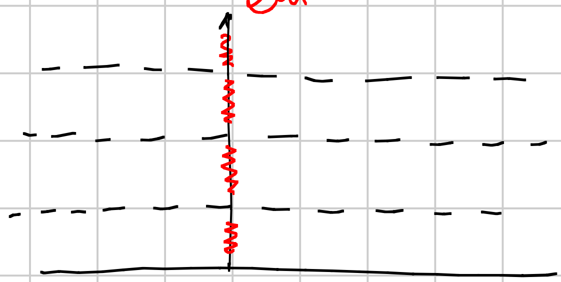
$\Rightarrow \exists z\in\,]a,b[$ t.c. $f(z)=0$

Esercizio

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{N}$ una funzione continua

$\Rightarrow f$ è costante

dim



Per ipotesi $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{N}$

e dunque $\displaystyle\bigcup_{k=0}^{+\infty}\,]k,k+1[\,\cap f(\mathbb{R})=\emptyset$

Prendo $m,n\in f(\mathbb{R})$: per il corollario del Teorema di Bolzano, se $m<n$ allora $\forall k\in\,]m,n[\ \exists z\in\mathbb{R}$ t.c. $f(z)=k$

$\Rightarrow f(\mathbb{R})\supseteq\,]m,n[$ ma questo è ASSURDO in quanto $f(\mathbb{R})\subseteq\mathbb{N}$ $\boxed{///}$

OSS: senza utilizzare Bolzano, l'esercizio precedente non ha dimostrazione evidente

Esercizio Data l'equazione $2x^3-3x+\frac{1}{2}=0$

provare che $\exists$ tre radici distinte e cercarne una approssimazione

dim

$f(x)=2x^3-3x+\frac{1}{2}$ essendo un polinomio, è continua su $\mathbb{R}$

① $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{2x^3}\right) = -\infty\cdot 2 = -\infty$

② $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \qquad = +\infty\cdot 2 = +\infty$

① $\Rightarrow \forall M>0\ \exists N>0 : \forall x\quad x<-N \Rightarrow f(x)<-M$

$\Rightarrow \exists\, x^-\in\mathbb{R} : f(x^-)<0$

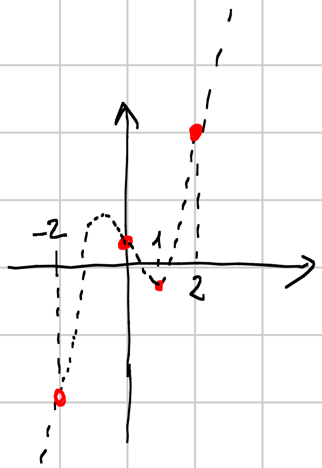
② $\Rightarrow \forall M>0\ \exists N>0 : \forall x\quad x>N \Rightarrow f(x)>M$

$\Rightarrow \exists\, x^+\in\mathbb{R} : f(x^+)>0$

$\Longrightarrow f:[x^-,x^+]\to\mathbb{R}$ è continua con $f(x^-)f(x^+)<0$

$\overset{(\text{Bolzano})}{\Longrightarrow} \exists\, z\in[x^-,x^+]\quad f(z)=0$

Osservo che $f(0)=0^3-3\cdot 0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}>0$ *



$f(1)=2-3+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}<0$ *

$f(-1)=-2+3+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}>0$

$f(2)=2\cdot 8-3\cdot 2+\frac{1}{2}=\frac{21}{2}>0$ *

$f(-2)=2\cdot(-8)+3\cdot 2+\frac{1}{2}=-\frac{19}{2}$ *

$f:[-2,0]\to\mathbb{R}$ continua $f(-2)\cdot f(0)<0 \Longrightarrow \exists z_1\in]-2,0[: f(z_1)=0$

$f:[0,1]\to\mathbb{R}$ continua $f(0)\cdot f(1)<0 \Rightarrow \exists z_2\in]0,1[: f(z_2)=0$

$f:[1,2]\to\mathbb{R}$ " $f(1)\, f(2)<0 \Rightarrow \exists z_3\in]1,2[\ f(z_3)=0$

L'equazione di 3° grado ha 3 soluzioni $\Rightarrow$

$z_1\in]-2,0[$ è unica

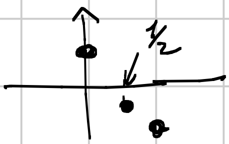
$z_2\in]0,1[$ " "

$z_3\in]1,2[$ " "

Approssimiamo la radice $z_2\in]0,1[$

$f(0)=\frac{1}{2}>0>-\frac{1}{2}=f(1)$ $\quad m=\frac{1}{2}$ puntomedio

$f(\frac{1}{2})=2\cdot\frac{1}{8}-3\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=\frac{1}{4}-1=-\frac{3}{4}$



$\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}>0>-\frac{3}{4}=f(\frac{1}{2})$ $\quad m_2=\frac{0+1/2}{2}=\frac{1}{4}$

$f(\frac{1}{4})=2\cdot\frac{1}{64}-3\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{1}{32}-\frac{1}{4}=\frac{-7}{32}$

$\Rightarrow f(0)=\frac{1}{2}>0>-\frac{7}{32}=f(\frac{1}{4})$ $\quad m_3=\frac{0+1/4}{2}=\frac{1}{8}$

$f(\frac{1}{8})=2\cdot\frac{1}{8^3}-\frac{3}{8}+\frac{1}{2}=\frac{2}{8^3}-\frac{3}{8}+\frac{4}{8}>0$

$f(0)=\frac{1}{2}>0$ $\quad f(\frac{1}{8})>0>f(\frac{1}{4})$

dopo 3 iterazioni ho scoperto che $z_2\in]\underbrace{\tfrac{1}{8},\tfrac{1}{4}}[$

ovvero $z_2=\frac{3}{16}\pm\boxed{\frac{1}{16}}$ $\qquad \frac{1}{4}-\frac{3}{16}=\frac{1}{16}$

Esercizio Provare che l'equazione

$$e^x = x^2 - 2x + k$$

ammette almeno una soluzione $\forall k \in \mathbb{R}$

dim

L'eq è nonlineare, dunque non ho speranze di risolverla algebricamente

Non vale il Teorema fond. dell'Algebra

Posso riscriverla come

$$f(x) = e^x - x^2 + 2x = k$$

Si ha che

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} e^x \left(1 - \frac{x^2}{e^x} + \frac{2x}{e^x}\right) = +\infty \cdot 1 = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} x^2 \cdot \left(\frac{e^x}{x^2} - 1 + \frac{2}{x}\right) = +\infty \cdot (-1) = -\infty$$

$\boxed{\text{Fissato } k}$ $\begin{cases} \exists N > 0 : \; x > N \Rightarrow f(x) > k \\ \Rightarrow \exists x^+ \in \mathbb{R} : \; f(x^+) > k \end{cases}$

$\exists N > 0 : \; x < -N \Rightarrow f(x) < k$

$\Rightarrow \exists x^- \in \mathbb{R} : \; f(x^-) < k$

allora $f : [x^-, x^+] \to \mathbb{R}$ continua $f(x^-) < k < f(x^+)$

$\Rightarrow$ (Corollario Teorema Bolzano) $\exists z \in]x^-, x^+[\; : \; f(z) = k$

Esercizio Calcolare, al variare di $a>0$,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\log_a(x+2)-\log_a 2}{x} = \qquad \boxed{a\neq 1}$$

dim

$$\frac{\log_a(x+2)-\log_a 2}{x} = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(\frac{x+2}{2}\right) = \frac{1}{x}\cdot\log_a\left(1+\frac{x}{2}\right)$$

$$= \left[\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\log_a\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]\cdot\frac{1}{2}$$

$$\log_a y = \log_a e^{\log_e y} = \log_e y\cdot\log_a e$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\log_a e\cdot\log_e\left(1+\frac{x}{2}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\log_a e\left[\frac{1}{\frac{x}{2}}\cdot\log_e\left(1+\frac{x}{2}\right)\right] \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{2}\log_a e \begin{cases} >0 & a>1 \\ <0 & 0<a<1 \end{cases}$$

$$\log_a e = \log_e e\cdot\frac{1}{\log_e a} = \qquad \log_a y = \log_a e^{\log_e y} =$$

$$\boxed{\log_a e = \frac{1}{\log_e a}} \qquad = \log_e y\cdot\log_a e$$

$$\log_e y = \log_e a^{\log_a y} = \log_a y\cdot\log_e a$$

Esercizio

Calcolare, al variare di $a,b\in\mathbb{R}$, il seguente limite

$$\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{Tg}\left(ax+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)$$

dim

$a=0$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{b}{x}=b$

$b=0$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} x\cdot \operatorname{Tg}(ax)=0$

$$\operatorname{Tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta+\operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta-\operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta}=\frac{\operatorname{Tg}\alpha+\operatorname{Tg}\beta}{1-\operatorname{Tg}\alpha\operatorname{Tg}\beta}$$

$$\operatorname{Tg}\left(ax+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)=\frac{\operatorname{Tg}(ax)+\frac{b}{x}}{1-\frac{b}{x}\cdot\operatorname{Tg}ax}$$

$$x\operatorname{Tg}\left(ax+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)=\frac{\underbrace{x\operatorname{Tg}(ax)}_{\to 0}+b}{1-ab\cdot\underbrace{\frac{\operatorname{sen}ax}{ax}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{1}{\cos ax}}_{\to 1}}$$

$\forall a,b : a\cdot b\neq 1 \quad a,b\neq 0$

$$\lim_{x\to 0} x\operatorname{Tg}\left(ax+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)=\frac{b}{1-a\cdot b}$$

Resta da studiare

$\boxed{a=\frac{1}{b}}$ $\quad \displaystyle\lim_{x\to 0} x\operatorname{Tg}\left(\frac{x}{b}+\operatorname{arctg}\frac{b}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to 0} x\cdot\frac{\operatorname{Tg}\frac{x}{b}+\frac{b}{x}}{1-\frac{b}{x}\cdot\operatorname{Tg}\frac{x}{b}}=\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{Tg}\frac{x}{b}+\frac{b}{x}}{x-b\cdot\operatorname{Tg}\frac{x}{b}}\,x^2$$

se ora poniamo $\frac{x}{b}=y$ il limite diventa

$$\lim_{y\to 0} b\cdot y\cdot \frac{\mathrm{Tg}\,y+\frac{1}{y}}{1-\frac{1}{y}\cdot\mathrm{Tg}\,y} = b\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1+y\,\mathrm{Tg}\,y}{\frac{y-\mathrm{Tg}\,y}{y}} \qquad 1+y\,\mathrm{Tg}\,y \to 1$$

$= b\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{y-\mathrm{Tg}\,y}$ e per concludere mi serve

lo sviluppo di Taylor con resto di Peano di Tgy centrato in $y=0$, cioè $\mathrm{Tg}\,y = y+\frac{y^3}{3}+o(y^4;0)$ che mi permette di scrivere

$$= b\lim_{y\to 0}\frac{y}{y-\left(y+\frac{y^3}{3}+o(y^4;0)\right)} = b\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{-\frac{y^3}{3}+o(y^4;0)}$$

$$= b\lim_{y\to 0}\frac{-3}{y^2+o(y^3;0)} = \begin{cases} +\infty & b<0 \\ -\infty & b>0 \end{cases}$$

Ma per fare questo (ovvero studiare il caso $ab=1$) si deve quindi conoscere quale sia lo sviluppo di Taylor con il resto di Peano di Tgy centrato in $y=0$

oppure, equivalentemente

$$b\lim_{y\to 0}\frac{y}{y-\mathrm{Tg}\,y} \overset{\text{Hopital}}{=} b\lim_{y\to 0}\frac{1}{1-(1+\mathrm{Tg}^2 y)} = b\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{-\mathrm{Tg}^2(y)}$$

e si conclude $= \begin{cases} -\infty & \text{se } b>0 \\ +\infty & \text{se } b<0 \end{cases}$

Esercizio

Studiare la successione $\begin{cases} a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \\ a_1 = 2 \\ a_0 = 2 \end{cases}$

dim

Questa è la successione di Fibonacci, introdotta da Leonardo Pisano il Fibonacci (1180-1200) per studiare come incrementa il numero di coppie di conigli fertili da un mese all'altro

$n=0$	ho 1 coppia appena nata	$\equiv$ 2 conigli
$n=1$	ho 1 coppia fertile	$\equiv$ 2 conigli
$n=2$	ho 1 " " e 1 coppia appena nata	$\equiv$ 4 conigli
$n=3$	ho 2 " " e 1 " " "	$\equiv$ 6 conigli
$n=4$	ho 3 " " e 2 " " "	$\equiv$ 10 "
		etc

Dunque $\begin{cases} a_0 = 1 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n \quad (*) \end{cases}$

$a_0 = 2;\ a_1 = 2;\ a_2 = 4;\ a_3 = 6;\ a_4 = 10;\ a_5 = 16;\ a_6 = 26 \dots$

Vogliamo trovare l'espressione esplicita di a_n

A tal fine si osserva che la successione

λ^n soddisfa la legge $(*)$ $\forall n$

se e soltanto se $\lambda^{n+2} - \lambda^{n+1} - \lambda^n = \lambda^n(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0 \ \forall n$

" " " " $\lambda^2 - \lambda - 1 = 0$

" " " " $\lambda_1 = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ o $\lambda_2 = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

dunque $A \cdot \lambda_1^n$ soddisfa $(*)$, cioè $A\lambda_1^{n+2} - A\lambda_1^{n+1} - A\lambda_1^n = 0$

" $B\lambda_2^n$ " $(*)$ " $B\lambda_2^{n+2} - B\lambda_2^{n+1} - B\lambda_2^n = 0$

e dunque, sommando $(A\lambda_1^{n+2} + B\lambda_2^{n+2}) - (A\lambda_1^{n+1} + B\lambda_2^{n+1}) - (A\lambda_1^n + B\lambda_1^n) = 0$

ovvero $A\lambda_1^n + B\lambda_2^n$ soddisfa $(*)$

Possiamo ora imporre che siano soddisfatte

$a_0 = 2 = a_1$

ovvero

$$\begin{cases} A\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^0 + B\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^0 = A+B = 2 \\ A\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) + B\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) = 2 \end{cases}$$

Ne segue che

$$\begin{cases} A = 2-B \\ (2-B)\cdot\frac{(1-\sqrt5)}{2} + B\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{''} \\ (1-\sqrt5)+B\left(\cancel{\tfrac{1}{2}}-\cancel{\tfrac{1}{2}}+\frac{\sqrt5}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right)=2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} A = 2-\frac{1+\sqrt5}{\sqrt5} \\ B = \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5} \end{cases} \qquad \begin{cases} A = \frac{\sqrt5-1}{\sqrt5} \\ B = \frac{1+\sqrt5}{\sqrt5} \end{cases}$$

da cui segue $a_n = \frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n \quad n\geq 0$

Abbiamo già visto $a_0 = 2$ e $a_1 = 2$

$$a_2 = \left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1+5-2\sqrt5}{4}\right) + \left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1+5+2\sqrt5}{4}\right)$$

$$= \left(\frac{3}{2}-\cancel{\frac{\sqrt5}{2}}\right) - \frac{1}{\sqrt5}\left(\cancel{\frac{3}{2}}-\frac{\sqrt5}{2}\right) + \left(\frac{3}{2}+\cancel{\frac{\sqrt5}{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt5}\left(\cancel{\frac{3}{2}}+\frac{\sqrt5}{2}\right)$$

$$= \frac{3}{2}+\frac{3}{2} + \frac{1}{\sqrt5}\cdot\left(\frac{\sqrt5}{2}+\frac{\sqrt5}{2}\right) = 4$$

Proviamo che a_n successione t.c. $\begin{cases} a_0 = a_1 = 2 \\ a_{n+1} = a_{n+1} + a_n \end{cases} \Rightarrow a_n \in \mathbb{N} \ \forall n$

$a_0 = a_1 = 2 \in \mathbb{N}$ ✓

Suppongo $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0 \in \mathbb{N}$

Ne segue che $a_{n+1} = a_n + a_{n-1} \in \mathbb{N}$

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+2} + \left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} =$$

$$\left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n+1} + \left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n+1} + \left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^{n} + \left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^{n}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n \left(1-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\left[\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right) - 1\right] +$$

$$\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n\left(1+\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\left[\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right) - 1\right] = 0$$

che è vero poiché λ_1, λ_2 son radici di $\lambda^2-\lambda-1=0$

Inoltre $$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5}\left(\frac{1-\sqrt5}{2}\right)^n + \frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}\left(\frac{1+\sqrt5}{2}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\sqrt5}{2}\cdot\sqrt[n]{\frac{\sqrt5+1}{\sqrt5}}\cdot\sqrt[n]{1+\frac{\sqrt5-1}{\sqrt5+1}\cdot\left(\frac{1-\sqrt5}{1+\sqrt5}\right)^n}$$

$$= \frac{1+\sqrt5}{2} = 1,6\ldots > 1 \Rightarrow a_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty$$

ed inoltre $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \frac{1+\sqrt5}{2}$ sezione Aurea

Questa è, molto probabilmente, la più studiata successione nella storia della matematica. L'espressione di a_n qui ricavata è nota come formula di Binet

$\frac{1+\sqrt5}{2} = \frac{b}{a}$ dove $a : b = b : (a+b)$

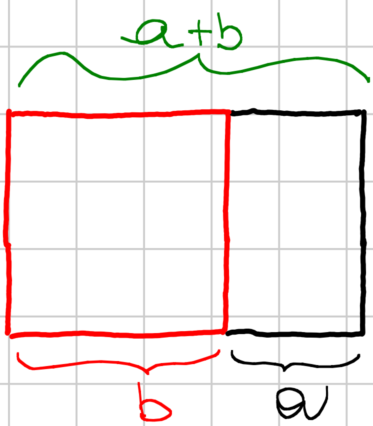
$\Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{a}{b}+1$

ovvero è il rapporto tra due segmenti di cui il maggiore, b è medio proporzionale tra a e $(a+b)$

$\Rightarrow \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \left(\frac{b}{a}\right) - 1 = 0$

ne trovo le due sol. $\cancel{\frac{b}{a} = \frac{1-\sqrt5}{2}} < 0$

$\frac{b}{a} = \frac{1+\sqrt5}{2}$



Rettangolo Aureo