

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI E LOGARITMICHE

1) $\left(\frac{2}{5}\right)^{x+3} < \left(\frac{5}{2}\right)^{x-2}$; 2) $4^{x^2+2x} > (8)^4 (64)^x$; 3) $\log(x^2 - 3x + 4) \geq \log(4x - 6)$

5) $\frac{2^{2x} - 5 \cdot 2^x + 4}{\log_1(2x-1)} < 0$; 6) $\log \frac{x-1}{x+2} < 2$; 7) $\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1} - 1}{\sqrt{2} - \sqrt[3]{2^{x-1}}} < 0$; 8) $\frac{1}{4} \cdot 7^{x-2} < \frac{7}{21 + \sqrt{7^x}}$;

9) $3 \log x - \frac{12}{\log x} < 5$;

RISULTATI:

1) $x > -1/2$; 2) $x < -2$ o $x > 3$; 3) $3/2 < x \leq 2$ o $x \geq 5$; 5) $1/2 < x < 1$ o $x > 2$; 6) $x < -2$ o $x > 1$;

7) $1 < x < 5/2$; 8) $x < 2$; 9) $0 < x < e^{-\frac{4}{3}}$ o $1 < x < e^3$;

DISEQUAZIONI IRRAZIONALI:

2) $\sqrt{2x+1} \leq x-3$; 3) $2x-3 < \sqrt{x-1}$; 4) $\frac{\sqrt{x-1}}{4x^2+25} < 0$; 6) $\frac{2x}{\sqrt{x^2-1}} > 3$; 7) $\frac{x+1-\sqrt{x}}{3-\sqrt{x}} > 0$;

9) $\sqrt{x^2-3x-28} \leq \sqrt{x^2+x-6}$; 10) $\sqrt{3x+5} < \frac{3x+1}{\sqrt{3x-5}}$; 12) $\log_2 \frac{x+\sqrt{x^2+9}}{2x} > 1$;

14) Risolvere graficamente:

a) $\sqrt{x+1} \leq 5-x$, b) $\sqrt{4-x^2} \geq 2x+2$; c) $\sqrt{x^2-1} < x+2$

RISULTATI:

2) $x \geq 4 + 2\sqrt{2}$; 3) $1 \leq x < 2$; 4) $\emptyset$; 6) $1 < x < \frac{3}{\sqrt{5}}$;

7) $0 \leq x < 9$; 9) $-11/2 \leq x \leq -4$ o $x \geq 7$; 10) $x > 5/3$; 12) $0 < x < \frac{3\sqrt{2}}{4}$; 14) a) $-1 \leq x \leq 3$; b) $-2 \leq x \leq 0$; c) $-5/4 < x \leq -1$ o $x \geq 1$

DISEQUAZIONI in cui compare la funzione MODULO:

16) $|x| - x > 2$; 17) $|2x - |x^2 - 3|| < 1$; 18) $x^2 - 2|x| + 1 > 0$; 19) $\sqrt{|x||x|-2} < 1$; 20) $\frac{x-2}{|x^2-x|} \geq 2$;

22) $|x-3| \geq x+1$; 23) $-\frac{1}{2}|-2x-6| < 0$; 24) $x - |x^2-1| > -1$;

25) $\sqrt{4x^2-1} \geq 1-|x|$; 26) $1 \leq |2\cos x| \leq \sqrt{3}$, $x \in [0, 2\pi]$; 27) $\sqrt{2x^2+3x+1} > -x\sqrt{2}$

30) $|\log x - 2| - \log^2 x > 0$; 32) $\log|e^x - e^{2x}| \leq x+2$;

36) Risolvere graficamente:

b) $k - |x^2 - 1| \geq 0$ al variare di k reale; c) $4 - x^2 \geq |x| + k$ al variare di k reale

RISULTATI:

$$16) x < -1 ;$$

$$17) -1 + \sqrt{3} < x < -1 + \sqrt{5} \vee 1 + \sqrt{3} < x < 1 + \sqrt{5}; \quad 18) \forall x \neq \pm 1; \quad 19) \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3}; \quad 20) \emptyset ;$$

$$22) x \leq 1 ; \quad 23) \forall x \neq -3; \quad 24) 0 < x < 2 ; \quad 25) x \leq \frac{1 - \sqrt{7}}{3} \text{ o } x \geq \frac{-1 + \sqrt{7}}{3} ;$$

$$26) \frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{3} \text{ o } \frac{2}{3}\pi \leq x \leq \frac{5}{6}\pi \text{ o } \frac{7}{6}\pi \leq x \leq \frac{4}{3}\pi \text{ o } \frac{5}{3}\pi \leq x \leq \frac{11}{6}\pi; \quad 27) x > -1/3 ; \quad 30) e^{-2} < x < e; \quad 32) x \leq \log(e^2 + 1) \text{ e } x \neq 0 ;$$

$$36) \text{ a) } x > -1 ; \text{ b) } S = \emptyset \text{ se } k < 0, x = \pm 1 \text{ se } k = 0, -\sqrt{1+k} \leq x \leq -\sqrt{1-k} \text{ o } \sqrt{1-k} \leq x \leq \sqrt{1+k} \text{ se } 0 < k < 1 ,$$

$$-\sqrt{1+k} \leq x \leq \sqrt{1+k} \text{ se } k \geq 1 , \text{ c) } \frac{1 - \sqrt{17 - 4k}}{2} \leq x \leq \frac{-1 + \sqrt{17 - 4k}}{2} \text{ se } k < 4, x = 0 \text{ se } k = 4, S = \emptyset \text{ se } k > 4.$$

I NUMERI RAZIONALI E I NUMERI REALI:

1) Dimostrare che i numeri razionali hanno sviluppo decimale finito o periodico.

2) Calcolare il sup. e l'inf. dei seguenti insiemi, individuando gli eventuali max. e min. :

$$A = \left\{ \frac{2n+3}{5n} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\} \quad C = \left\{ \frac{|3-2n|}{n+2} : n \in \mathbb{N} \right\},$$

$$D = \left\{ \frac{(-1)^n n + n}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad F = \left\{ \frac{3-2^n}{2^{n+1}} : n \in \mathbb{N} \right\}, \quad G = \left\{ \frac{n-2}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$$

3) Dimostrare che l'insieme $A = \left\{ \frac{2}{n} - n^2, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$ non è inferiormente limitato e che l'insieme $B = \{n - 7\sin(n) + 4\cos(n) : n \in \mathbb{N}\}$ non è superiormente limitato.

RISULTATI:

2A) $\inf = 2/5$, $\sup = 1 = \max$; 2C) $\inf = 1/4 = \min$, $\sup = 2$;

2D) $\inf = 0 = \min$, $\sup = 1$; 2F) $\inf = -1/2$, $\sup = 1 = \max$;

2G) $\inf = -2 = \min$; $\sup = 1/2$

NUMERI NATURALI E PRINCIPIO DI INDUZIONE:

1) Provare che

$$\bullet 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \dots + n \cdot (n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

$$\bullet 1 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + \dots + n \cdot 2^{n-1} = (n-1) \cdot 2^n + 1$$

$$\bullet \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{3}{8} + \frac{4}{16} + \dots + \frac{n}{2^n} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$$

$$\bullet 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

$$\bullet 1 \cdot (1!) + 2 \cdot (2!) + 3 \cdot (3!) + \dots + n \cdot (n!) = (n+1)! - 1$$

2) Dimostrare per induzione la disuguaglianza di Bernoulli $(1+a)^n \geq 1+na$, $\forall a \geq -1$

3) Provare per induzione che.

$$4) \quad \forall n, 3^n \geq \frac{n}{2} \cdot 2^n;$$

$$5) \quad \forall n \geq 2, 3^n + 4^n \leq 5^n;$$

$$6) \quad \forall n \geq 6, n^n > 2^n \cdot n!;$$

$$7) \quad \forall n \geq 1, n! \geq 2^{n-1};$$

$$8) \quad \forall n, 3^{2n} - 2^n \text{ è multiplo di } 7;$$

$$9) \quad \forall n \geq 3, n^2 > 2n + 1;$$

$$10) \quad \forall n \geq 1, n^3 + 5n \text{ è divisibile per } 6;$$

$$11) \quad \forall n \geq 1 \text{ e } \forall a \in (0; 1), (1-a)^n < \frac{1}{1+na} \text{ (Bernoulli versione 2).}$$

$$12) \text{ Provare che } \sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} n+1, & q=1 \\ \frac{1-q^{n+1}}{1-q}, & q \neq 1 \end{cases}, \quad \forall n \geq 0$$

13) Siano date le seguenti uguaglianze:

$$a) \quad 1 + 1/2 = 2 - 1/2, \quad 1 + 1/2 + 1/4 = 2 - 1/4, \quad 1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 = 2 - 1/8, \text{ etc.}$$

$$b) \quad 1 - 1/2 = 1/2, \quad (1 - 1/2)(1 - 1/3) = 1/3, \quad (1 - 1/2)(1 - 1/3)(1 - 1/4) = 1/4, \text{ etc....}$$

Trovare e dimostrare per induzione la legge generale che queste uguaglianze suggeriscono.

14) Dimostrare che ogni intero $n \geq 2$ o è un numero primo o può essere scritto come prodotto di due o più numeri primi.

CALCOLO COMBINATORIO E CALCOLO DELLE PROBABILITA'

- 1) 14 amici si mettono in viaggio; hanno a disposizione una vettura a 7 posti, una a 5 posti e una moto. Considerando che i proprietari dei tre mezzi vogliono guidarli, in quanti modi diversi si possono comporre gli equipaggi?
- 2) Tra tutti i numeri di 6 cifre, tutte distinte fra loro, quanti sono quelli che hanno le prime 3 cifre pari e le ultime 3 cifre dispari? E se si escludono quelli che iniziano per 0?
- 3) a) Quanti numeri di tre cifre distinte si possono formare con le cifre 2, 3, 5, 6, 7 e 9? ; b) di essi quanti sono < 400 ? ; c) quanti sono pari? ; d) quanti sono dispari? ; e) quanti sono multipli di 5?
- 4) Ripetere il problema precedente nel caso che le cifre possano ripetersi.
- 5) Un'urna contiene 8 palline diverse; quante terne si possono formare estraendo successivamente tre palline dall'urna senza rimettere la pallina estratta nell'urna (cioè senza reimbussolamento)? Quante con reimbussolamento (cioè rimettendo ogni volta la pallina estratta nell'urna)?
- 6)
- 7) Quanti anagrammi della parola POLINOMIO iniziano con la lettera M? Quanti terminano con una vocale? E quanti non presentano le tre O e le due I in posizione adiacente?
- 8) Quanti sono i terni possibili al lotto? Giocando 6 numeri al lotto sulla ruota di Firenze, qual è la probabilità di fare un terno?
- 9) Un bambino possiede dei mattoncini Lego colorati: 6 rossi, 4 gialli, 2 verdi e 3 blu; in quanti modi può incolonnarli a formare una torre?
- 10)
- 11) Assumendo che i risultati X, 1, 2 delle 13 partite del Totocalcio siano equiprobabili, calcolare la probabilità che tutte le partite, eccetto una, terminino in parità.
- 12) Estraggo una carta da un mazzo di 40 carte. Qual è la probabilità che la carta estratta sia: a) nera ; b) una figura ; c) un asso ; d) non un fante ; e) non di denari; f) nera o una figura ; g) una figura o un asso ; h) una figura o non un fante ; i) un asso o non di denari.
- 13) Si prendono a caso 3 lampadine da un gruppo di 15 fra le quali si sa che ce ne sono 5 difettose. Calcolare la probabilità che delle 3 lampadine prese: a) nessuna sia difettosa ; b) esattamente una sia difettosa ; c) almeno una sia difettosa.
- 14) Le probabilità che tre uomini colpiscano un bersaglio sono, rispettivamente, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{4}$ e $\frac{1}{3}$. Ciascuno spara una volta al bersaglio. Calcolare la probabilità che uno e soltanto uno di essi colpisca il bersaglio.
- 15) Cinque amici di altezze diverse si dispongono in fila a caso. Qual è la probabilità che risultino in ordine dal più basso al più alto?
- 16) Da un'urna contenente 5 palline numerate da 1 a 5 si estraggono successivamente due palline senza rimettere la pallina estratta nell'urna. Calcolare la probabilità che: a) la somma dei numeri estratti sia dispari ; b) il numero della seconda pallina sia minore di quello della prima.
- 17)
- 18) Nel sacchetto A ci sono 15 palline numerate da 1 a 15. Un primo ragazzo ne estrae 7 e le mette nel sacchetto B, prima vuoto. Un secondo ragazzo estrae 3 palline dal sacchetto B, una dopo l'altra e ne legge i numeri man mano che le estrae. Qual è la probabilità che legga "uno, due, tre"?
- 19) Da un acquario contenente 4 pesci rossi, 2 bianchi e 3 di colore argento, ciascuno distinguibile dagli altri, vengono pescati a caso 3 pesci con un retino. Calcolare la probabilità che i tre pesci siano: a) tutti dello stesso colore ; b) tutti di colore diverso ; c) di due colori.
- 20) Una scatola contiene cinque sacchetti. Tre sacchetti contengono ciascuno 3 palline bianche e una rossa; gli altri due sacchetti contengono ciascuno 7 palline bianche e una rossa. Pietro sceglie a caso un sacchetto, e da quel sacchetto Paolo estrae a caso una pallina. Qual è la probabilità che sia rossa?
- 21)
- 22) Si lanciano contemporaneamente due dadi. Calcolare la probabilità che: a) almeno uno di essi presenti la faccia 6 ; b) nessuno dei due presenti la faccia 6 ; c) i due dadi presentino numeri diversi fra loro.

23) Alla selezione per due posti di lavoro partecipano 5 femmine e 3 maschi; sapendo che gli 8 aspiranti hanno uguali possibilità di essere assunti, calcolare la probabilità che vengano assunti: a) 2 femmine ; b) 1 femmina e 1 maschio ; c) due persone dello stesso sesso ; d) almeno 1 maschio.

RISULTATI:

1) 2310 ; 2) 3600 ; 2880 ; 3) a) 120 ; b) 40 ; c) 40 ; d) 80 , e) 20; 4) a) 216 ; b) 72 ; c) 72 ; d)144; e) 36; 5) 336; 512; 7) 3.360 ; 16.800 ; 29.520 ; 8) 117480 ; 9) 6.306.300 ; 11) 0,000016308 ; 12) a) 0,5 ; b) 0,3 ; c) 0,1 ; d) 0,9 ; e) 0,75 ; f) 0,65 ; g) 0,4 ; h) 1 ; i) 0,775 ; 13) a) 24/91 ; b) 45/91 ; c) 67/91 ; 14) 31/72 ; 15) $\sim 0,0083$; 16) a) 0,6; b) 0,5 ; 18) $\sim 0,00037$; 19) a) $\sim 0,0595$; b) $\sim 0,2857$; c) $\sim 0,65476$; 20) 1/5 ; 22) a) 11/36 ; b) 25/36 ; c) 5/6 ;. 23) a) 5/14 ; b) 15/28 ; c) 13/28 ; d) 9/14 .

FUNZIONI

1) Determinare, se possibile, la funzione inversa di $f(x)$ nei seguenti casi:

$$\begin{array}{lll} \text{a) } f(x) = x^3 - 2 & \text{b) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2+2x & x \leq 0 \end{cases} & \text{c) } f(x) = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x-1 & -1 < x < 0 \\ 2x+1 & x \leq -1 \end{cases} \end{array}$$

2) Dopo aver verificato la condizione necessaria per la composizione delle funzioni $f(x)$ e $g(x)$, determinare l'espressione di $g \circ f(x)$ nei seguenti casi:

$$\text{a) } f(x) = \log(x+1) \quad , \quad g(x) = 4x - x^2 - 6$$

$$\text{b) } f(x) = \sqrt{x^2 - 2x + 3} - 1 \quad , \quad g(x) = \log(x)$$

$$\text{c) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2-2x & x \leq 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = x^2$$

$$\text{d) } f(x) = \begin{cases} x+1 & x > 0 \\ 2-2x & x \leq 0 \end{cases} \quad , \quad g(x) = f(x)$$

$$\text{e) } f(x) = \begin{cases} 2x+10 & x \leq -2 \\ 4-x & x > -2 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \cos(2x) & x > 2 \\ \sin(x) & x \leq 2 \end{cases}$$

$$\text{f) } f(x) = \begin{cases} -x & x < 3 \\ 2x-9 & x \geq 3 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} e^{x-1} & x \leq 1 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) & x > 1 \end{cases}$$

3) Data la funzione $f(x) = \log(x)$, scrivere la sua funzione inversa $f^{-1}(x)$ e verificare che $f \circ f^{-1}(x) = f^{-1} \circ f(x) = x$

RISULTATI:

$$\text{a) } f^{-1}(x) = \sqrt[3]{x+2} \quad ; \quad \text{1b) } f(x) \text{ non è iniettiva perché...., quindi....} \quad ; \quad \text{1c) } f^{-1}(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ -x-1 & -1 < x < 0 \\ \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} & x \leq -1 \end{cases} \quad ;$$

$$\text{2a) } g \circ f(x) = 4 \log(x+1) - \log^2(x+1) - 6 \quad ; \quad \text{2b) } g \circ f(x) = \log(\sqrt{x^2 - 2x + 3} - 1) \quad ,$$

$$\text{2c) } g \circ f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & x > 0 \\ (2-2x)^2 & x \leq 0 \end{cases} \quad ; \quad \text{2d) } g \circ f(x) = \begin{cases} x+2 & x > 0 \\ 3-2x & x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{2e) } g \circ f(x) = \begin{cases} \sin(2x+10) & x \leq -4 \\ \cos(2(2x+10)) & -4 < x \leq -2 \\ \cos(2(4-x)) & -2 < x < 2 \\ \sin(4-x) & x \geq 2 \end{cases} \quad ; \quad \text{2f) } g \circ f(x) = \begin{cases} \sin\left(-\frac{\pi}{2}x\right) & x < -1 \\ e^{-x-1} & -1 \leq x < 3 \\ e^{2x-10} & 3 \leq x < 5 \\ \sin\left(\frac{\pi}{2}(2x-9)\right) & x \geq 5 \end{cases}$$

NUMERI COMPLESSI:

1) Calcolare il valore di

a) $w = \frac{z^2 - \bar{z}^2}{(z+1)(\bar{z}-1)+1}$ quando $z = 1 + i$; b) $w = \frac{\overline{(iz)} + |z|}{z+i}$ quando $z = 3 - 4i$;

e) Se $z = 1 - i$ e $w = \frac{|z|^2 - 3i\bar{z}}{iz - 1}$, allora: (A) $\text{Im}(w) = -5$; (B) $\text{Re}(w) = -5$; (C) $\text{Im}(w) = 5$; (D) $\text{Re}(w) = 5$

2) Dati i numeri $v = \beta + 2i$ e $w = 2 + i$, determinare β in modo che risulti $\text{Re} \frac{v}{w} = \text{Im} \frac{v}{w}$.

3) Calcolare le seguenti potenze: a) $(\sqrt{3} - i)^8$; b) $(1 - i\sqrt{3})^8$; c) $\left(\cos \frac{\pi}{3} - i \sin \frac{\pi}{6}\right)^6$;

d) Calcolare il modulo e l'argomento principale del seguente numero complesso: $z = \frac{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^5}{(1-i)^7}$

4) Calcolare e rappresentare graficamente nel piano di Gauss le radici n-esime (nei casi $n = 3$ e $n = 4$) di: a) $w = 1$; b) $w = i$; c) $w = -1 - i\sqrt{3}$

5) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ delle seguenti equazioni:

a) $z^2 - 2iz - 5 = 0$;

b) $z + \bar{z} - \frac{1}{\bar{z}} = 0$;

c) $|z| = i - 4z$;

d) $2z^2 - 4iz - (3 + i\sqrt{3}) = 0$;

f) $z^2 \cdot \bar{z}^2 + 2\bar{z}^2 + iz^2 + 2i = 0$;

i) $(2z + 3)^3 = -27i$;

l) $z^2 = \bar{z}$; m) $\left(\frac{\bar{z}}{z}\right)^3 \cdot z^4 = -2z^2$;

o) $z^3 = (-1 + i\sqrt{3}) \cdot \bar{z}$;

p) $|z + 2| = (\bar{z})^2 - 1$

6) Determinare le soluzioni in $\mathbb{C}$ dei seguenti sistemi di equazioni:

a) $\begin{cases} z \cdot \bar{w} = i \\ |z|^2 \cdot w + z = 1 \end{cases}$;

$$b) \begin{cases} \left| \frac{w}{2} \right| = |z| = \sqrt{2} \\ 2z + w = 4 \end{cases} ;$$

$$c) \begin{cases} |z - (1 + 3i)| = 2 \\ i \cdot (z + \bar{z}) = z - \bar{z} \end{cases} ;$$

$$d) \begin{cases} z + \bar{z} = -\frac{8}{5}|z| \\ \operatorname{Im} z = 2 + \operatorname{Re} z \end{cases}$$

$$e) \begin{cases} z^2 = -|w|^4 \\ w^2 - (2i + 1)w = \frac{z + \bar{z}}{3} + 1 - i \end{cases} ;$$

$$g) \begin{cases} z \cdot (1 + |w|) = -2i \\ w \cdot \bar{z} + (2 - iz) \cdot |w| = |z| \cdot w \end{cases}$$

$$i) \begin{cases} z + w = 1 + i \\ (|w|)^2 + \bar{z} = 1 - i \end{cases} ;$$

$$l) \begin{cases} \bar{w} \cdot z + 1 - i\sqrt{3} = 0 \\ z^3 \cdot (|z|)^2 - (\bar{z})^2 \cdot w = 0 \end{cases} ;$$

RISULTATI:

$$1a) -1 + i; 1b) 2 + i; 1e) (A); 2) \beta = 2/3; 3a) 2^7(-1 + i\sqrt{3}); 3b) -2^7(1 + i\sqrt{3}); 3c) \frac{i}{8};$$

$$3d) |z| = 1/8\sqrt{2}, \alpha = (23/12)\pi; 4a) \text{ con } n = 3: z_0 = 1, z_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}, \text{ con } n = 4: z_0 = 1, z_1 = i, z_2 = -1, z_3 = -i;$$

$$4b) \text{ con } n = 3: z_{0,1} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}, z_2 = -i, \text{ con } n = 4: z_{0,1,2,3} = \cos\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}\right), k = 0, 1, 2, 3; 4c) \dots;$$

$$5a) z_{2,1} = 2 + i, z_2 = -2 + i; 5b) z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2}, z_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}; 5c) z = -\frac{\sqrt{15}}{60} + \frac{1}{4}i; 5d) z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}i, z_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i;$$

$$5f) z_{1,2} = \pm i\sqrt{2}, z_{3,4} = \pm \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \right);$$

$$5i) z_1 = -\frac{3}{2} + \frac{3}{2}i, z_2 = \frac{-3\sqrt{3}-6}{4} - \frac{3}{4}i, z_3 = \frac{3\sqrt{3}-6}{4} - \frac{3}{4}i; 5l) z_1 = 0, z_2 = 1, z_{3,4} = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$5m) z_1 = 0, z_2 = -\sqrt{2}; 5o) z_1 = 0, z_{2,3} = \pm \sqrt{2} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right),$$

$$z_{4,5} = \pm \sqrt{2} \cdot \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i \right); \quad 5p) \quad \frac{1 \pm \sqrt{13}}{2}; \quad 6a) \quad z = 1/2 + 1/2i, \quad w = 1 - i;$$

$$6b) \quad z_1 = 1 + i \quad e \quad w_1 = 2 - 2i, \quad z_2 = 1 - i \quad e \quad w_2 = 2 + 2i; \quad 6c) \quad z_1 = 1 + i, \quad z_2 = 3 + 3i; \quad 6d) \quad z_1 = -8 - 6i, \quad z_2 = -8/7 + 6/7 i;$$

$$6e) \quad w_1 = i \quad e \quad z_1 = \pm i, \quad w_2 = 1 + i \quad e \quad z_2 = \pm 2i; \quad 6g) \quad z = -2i \quad e \quad w = 0, \quad z = \frac{-2i}{1 + \sqrt{2}} \quad e \quad w = 1 + i; \quad 6i) \quad z_1 = 1 + i \quad e \quad w_1 = 0, \quad z_2 = i \quad e$$

$$w_2 = 1; \quad 6l) \quad z_1 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (1 + i\sqrt{3}) \quad e \quad w_1 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} (1 - i\sqrt{3}), \quad z_2 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (-\sqrt{3} + i) \quad e$$

$$w_2 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} (\sqrt{3} + i), \quad z_3 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (-1 - i\sqrt{3}) \quad e \quad w_3 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} (-1 + i\sqrt{3}), \quad z_4 = \frac{\sqrt[4]{2}}{2} (\sqrt{3} - i) \quad e \quad w_4 = \frac{\sqrt[4]{8}}{2} (-\sqrt{3} - i);$$

CENNI DI TOPOLOGIA - LIMITI E CONTINUITA'

1) Determinare l'insieme dei punti di accumulazione e l'insieme dei punti isolati dei seguenti insiemi:

c) $C = \left\{ 3, \frac{1}{2}, 3 - \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3 - \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, 3 - \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, 3 - \frac{1}{n}, \dots \right\}$; d) $D =]0, 1[\cup [3, 7[$;

f) $F = \left\{ \frac{1}{n^2} : n \geq 1 \right\}$; g) $G =]-\infty, 2[\cup \{3\} \cup]4, +\infty[$.

2) Determinare i punti di accumulazione dei seguenti insiemi numerici:

a) $A = \left\{ \frac{9n^2 - 1}{4n^2} : n \in \mathbb{N}, n \geq 1 \right\}$; b) $B = \left\{ \frac{7}{2} + \frac{3}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \right\}$; c) $C = \{-4\} \cup [2, 5)$;

d) $D = \left\{ (-1)^n - \frac{1}{n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$;.

3) Verificare, usando la definizione, l'esattezza dei seguenti limiti: a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{(1-x)^2} = +\infty$;

b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt[3]{x-1} = -\infty$; c) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x+1}{x} = -\infty$; d) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2 - 9x + 10}{x-2} = 1$

4) Verificare che, se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, allora $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{f(x)} = 0^+$

5) Stabilire se esistono i seguenti limiti: a) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{e^x - 1}{x^2 - 5x + 6}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0} \arctan \frac{1}{x}$; c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2|x-1|}{x^2 - x^3}$.

6) Determinare il valore del parametro $a \in \mathbb{R}$ per il quale esiste $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$, dove $f(x) = \begin{cases} e^{-x-2} & x \leq -2 \\ \sqrt{x+a} & x > -2 \end{cases}$

7) Studiare la continuità delle seguenti funzioni:

a) $f(x) = \frac{2x-3}{|x|+2}$; b) $f(x) = \begin{cases} 2\sin x & x < 0 \\ \log(x^2 + e), & x \geq 0 \end{cases}$;

8) Determinare il valore dei parametri $a, b \in \mathbb{R}$ per i quali le seguenti funzioni risultano continue $\forall x \in \mathbb{R}$:

a) $f(x) = \begin{cases} \arctg \frac{1}{x} & x \in]0, 1[\\ ax + b & x \notin]0, 1[\end{cases}$; c) $f(x) = \begin{cases} 2^{2x} - a^2 - 4 & x < 2 \\ a^{x-1} & x \geq 2 \end{cases}$

RISULTATI:

1) $D(C) = \{0, 3\}$, $I(C) = C \setminus \{3\}$; $D(D) = [0, 1] \cup [3, 7]$, $I(D) = \emptyset$; $D(F) = \{0\}$, $I(F) = F$;

2) b) $7/2$; c) ogni $x \in [2, 5]$; d) $-1, 1$; 6) $a = 3$; 7) a) continua $\forall x \in \mathbb{R}$;

b) continua $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$; 8) a) $a = -\pi/4$, $b = \pi/2$; c) $a = 3$; 9) a) vera; b) falsa; c) vera,

d) falsa.

CALCOLO DI LIMITI

Calcolare i seguenti limiti:

$$1) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 5x}{x^2 - 4x + 4} ; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\pi - x)}{\pi - x} ; \quad 4) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x - 3}{(1 - x)^2 \cdot (\log x - 3)} ; \quad 5) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^{-x}}{\sqrt{1 - \frac{1}{x}}} ;$$

$$7) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos\left(\pi - \frac{2}{x-1}\right)}{-e^{-x}} ; \quad 8) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\log_{\frac{4}{5}} x}{3 - x} ;$$

$$9) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{|2-x|}} + \frac{1}{2}}{\log|2-x|} ; \quad 12) \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2}\right) ;$$

$$13) \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \left(\sin \frac{1}{x} + \cos \frac{1}{x}\right) ; \quad 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + \cos^2 x)^x ; \quad 16) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{1}{x + 2^{\frac{1}{x-3}}} ;$$

Calcolare, se esistono, i seguenti limiti :

$$17) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{x^3 - x^2 - x + 1} ; \quad 18) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 5x^2}{x^4 + 2x^2} ; \quad 19) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 + 3x^2 - 1}{x^3 + 5} ;$$

$$21) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^3 + 3x - 1}{6x^3 + 7} ; \quad 24) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^2 + x + 2}}{x + 7}$$

$$25) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+2}) ;$$

$$29) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{x^2 + 2}} ; \quad 30) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^{-x} + x^3}{2^{\frac{1}{x}} - x^{10}} ;$$

$$32) \lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot (\log(x+2) - \log x) ; \quad 33) \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+8}{x-2}\right)^x ; \quad 34) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} ; \quad 35) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\sqrt[3]{x})}{3x^2} ;$$

$$36) \text{ Discutere, al variare di } a \in \mathbb{R}, \text{ il valore dei seguenti limiti: a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - 1}{x + 2} - ax\right) ;$$

$$\text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x - \sqrt{ax^2 + x}) \text{ con } a > 0 ; \quad \text{c) } \lim_{x \rightarrow 0^-} 3^{\frac{2-a}{x}} ; \quad \text{d) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(a+1)x^2 + 2(a+2)x - 1}{ax + 2} .$$

RISULTATI:

1) $-\infty$; 2) 0 ; 4) $+\infty$; 5) $+\infty$; 7) $+\infty$; 8) $+\infty$; 9) 0^- ; 12) $-\infty$; 13) 0 ; 15) $+\infty$;

16) $1/3$; 17) $3/2$; 18) $-5/2$; 19) $+\infty$; 21) $5/6$; 24) 0^+ ; 25) 0^- ;

29) 2 ; 30) 0^- ; 32) 2 ; 33) e^{10} ; 34) 2 ; 35) non esiste ;

36) a) -2 se $a = 1$, $+\infty$ se $a < 1$, $-\infty$ se $a > 1$; b) $-1/2$ se $a = 1$, $+\infty$ se $0 < a < 1$, $-\infty$ se $a > 1$; c) 1 se $a = 2$, 0 se $a < 2$, $+\infty$ se $a > 2$; d) $-\infty$ se $a < -1$ oppure $a > 0$, $+\infty$ se $-1 < a \leq 0$, -2 se $a = -1$.

INFINITESIMI E CALCOLO DI LIMITI

1) Data la funzione $f(x) = 1 - 3x + x^3 - x^4 - 3x^6$, verificare che: a) il polinomio di Taylor di ordine 1 centrato in $x_0 = 0$ è $P_1 = 1 - 3x$; b) quello di ordine 2 è $P_2 = 1 - 3x$; c) quello di ordine 3 è $P_3 = 1 - 3x + x^3$; d) quello di ordine 5 è $P_5 = 1 - 3x + x^3 - x^4$.

3) Date le funzioni $P(x) = 1 + x^2 - 2x^3 + x^5 + o(x^6)$ per $x \rightarrow 0$ e $Q(x) = x + x^3 - 3x^4 + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$, calcolare:
a) $P(x) \cdot Q(x)$; b) $[P(x) + o(x^2)] \cdot Q(x)$; c) $[P(x) + o(x^3)] \cdot [Q(x) + o(x^4)]$; d) $[P(x) + o(x)] \cdot [Q(x) + o(x^2)]$.

4) Calcolare: a) $(x^2 + o(x^2))^3$; b) $\frac{o(x^2)}{x}$; c) $o(x^3 + o(x^4))$;
e) $(x - 2x^3 + o(x^3))^2 + (x - 2x^3 + o(x^3))^3$

5) Sviluppare fino all'ordine indicato le seguenti funzioni:

b) $f(x) = e^{x^2} - 1 - \sin^2 x$ fino al 4° ordine;

c) $f(x) = \log(1 + x^3) + \sin x - x$ fino al 3° ordine.

6) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow 0$ dei seguenti infinitesimi:

c) $f(x) = \cos x - 1 + \tan x$; d) $f(x) = 2x^2 \sin^2 x$; e) $f(x) = \sin(\cos x - 1)$; f) $f(x) = (1 + x)^a - 1$;

g) $f(x) = \sqrt[3]{x + x^2} - \sqrt[3]{x} + x^2$; h) $f(x) = \frac{1 - \cos(x + x^2)}{\sin^2 x}$; i) $f(x) = \sin(2x^2) \cdot (\sqrt{1 + 3x} - 1)$;

7) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow \pi/2$ di: $f(x) = \sin(\cos x)$ (Si può usare la Formula di Taylor con il resto di Peano)

8) Calcolare ordine e parte principale per $x \rightarrow +\infty$ di: b) $f(x) = \sqrt{\frac{x-3}{x}} - 1$; c) $f(x) = \arctan \frac{3}{x^2}$

9) Date $f(x) = (x - \sin x)^2$ e $g(x) = x - \log(1 + x)$, calcolare l'ordine di infinitesimo di $f(x) / g(x)$.

10) Calcolare, se esistono, i seguenti limiti:

b) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{1 - \cos(x+1)}{x+1} \cdot \frac{3(x-1)}{e^{x^2-1} - 1}$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \sin\left(\log \frac{x+1}{x+2}\right)$;

e) $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x \log(1+x)}{1 - \cos x} \right)^{3-x}$; g) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\sin x - 1}{\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2}$;

h) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \left(1 - e^{\frac{x}{1+x^2}}\right)$; i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 \cdot \left(e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{1}{1+x}}\right)$;

l) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x^2} - 1 - \sin^2 x}{x - \sin x}$; n) $\lim_{x \rightarrow \pi} \left(\frac{1}{\sin x} + (\tan x)^{-1} \right)$;

p) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 - \sin^2 x}{(1 + 2x^2)^{-1} - \cos 2x}$; s) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 - 2 \cos 3x^2 - \sin x^3 + \log(1 + x^3)}{e^{2x^4} - 1}$;

11) Determinare il valore del parametro α in modo che il seguente limite sia un numero finito e calcolarne il valore: $\lim_{x \rightarrow 0} x^{-2} \cdot (e^{\alpha x} - e^x - x)$

12) Determinare i valori dei parametri a e b in modo che il $\lim_{x \rightarrow 0} (x^{-3} \cdot \sin 3x + ax^{-2} + b)$ valga 0.

13) Calcolare, al variare del parametro reale α , i seguenti limiti:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x^\alpha}$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x}{e^x - 1} + \frac{x^\alpha}{x - \sin x} \right)$; c) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{|x|^\alpha + x^2}$;

d) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \sin x}{(1-x)^{-1} \cos x - e^x - \frac{x^\alpha}{3}}$; e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(x)^2 - \sin^2 x - \frac{x^\alpha}{3}}{(1+x^2) \log(1+x^2) - e^{x^2} + 1}$;

RISULTATI:

6) c) ord. 1, p. p. x ; d) ord. 4, p.p. $2x^4$; e) ord. 2, p.p. $-x^2/2$; f) ord. 1, p.p. αx ; g) ord. $4/3$, p.p. $\frac{1}{3}x^{\frac{4}{3}}$; h) ord. 0, p. p. $1/2$; i) ord.3, p.p. $3x^3$; **7)** ord. 1, p.p. $-(x - \pi/2)$; **8)** b) ord. 1, p.p. $-3/(2x)$; c) ord. 2, p.p. $3/x^2$; **9)** ord. 4, p.p. $x^4/18$; **10)** b) $3/2$; c) -1 ; e) 8 ; g) $-1/2$; h) -1 ; i) 1 ; l) 0 ; n) 0 ; p) $1/10$; s) $9/2$; **11)** $\alpha = 2$ e $\lim. = 3/2$; **12)** $a = -3$ e $b = 9/2$; **13)** a) $1/6$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $+\infty$ se $\alpha > 3$; b) 7 se $\alpha = 3$, 1 se $\alpha > 3$, $+\infty$ se $\alpha < 3$; c) $1/4$ se $\alpha = 2$, $1/2$ se $\alpha > 2$, 0 se $\alpha < 2$; d) $+\infty$ se $\alpha = 3$, 0 se $\alpha < 3$, $1/2$ se $\alpha > 3$; e) $19/30$ se $\alpha = 4$, $+\infty$ se $\alpha < 4$, $-\infty$ se $\alpha > 4$;

SUCCESSIONI

1) Stabilire quali fra le seguenti formule definiscono delle successioni:

a) $a_n = n + 20/n$; b) $a_n = \sqrt{\sin(n)}$; c) $a_n = 1/(n^2 - 20\cos n)$

2) Se la successione a_n è strettamente crescente, quale delle seguenti affermazioni è falsa?

(A) $a_n \rightarrow +\infty$; (B) a_n non ha massimo; (C) a_n è limitata inferiormente; (D) a_n ha solo estratte monotone

3) Se $-5 \leq a_n \leq 3$ per ogni n , allora:

(A) $a_n \cdot a_{n+1} \leq 25$; (B) $-5 \leq |a_n| \leq 3$; (C) $\inf a_n = -5$; (D) $\max a_n = 3$

5) Utilizzando il teorema dei due carabinieri, verificare che: a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{5^n + 3^n} = 5$;

6) Calcolare $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \right)^n$, usando anche la disuguaglianza di Bernoulli.

7) Calcolare i seguenti limiti:

b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sqrt{n^3} - 2\sqrt{n^5}}{1 + 3\sqrt{n^7}} \right)$; c) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n^3} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{n-2}} - \frac{1}{\sqrt{n+3}} \right)$;

d) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{(-1)^n n - 2}{3n - 2} \right)$; g) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\sin \frac{1}{n}}{1 - \cos \frac{1}{\sqrt{n}}} \right)$; h) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n + 4^n}{3^n}$; i) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2^n}{n}$;

j) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sqrt[3]{\frac{n^2 + n \log n}{n^2}} - 1 \right) \cdot \frac{15n^2}{n-4}$; k) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{2n!}$; l) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$; m) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \binom{3n}{n}$; o) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + n}$;

p) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{2^n + 3^n}$; r) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{2^n} - \frac{n}{7^n}}$; t) $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n^2(1 - \cos \frac{1}{n})}$;

u) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\cos \frac{\pi}{n} \right)^{n^2}$; x) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n^{\sqrt{n}} - 2^n)$; y) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\sin \frac{1}{n} \right)^{\sin \frac{1}{n}}$; v) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^{\frac{2}{3}} \cdot \sin(n!)}{n+1}$;

8) Provare che $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\frac{n^n}{n!}} = e$ (usare la disuguaglianza di Stirling)

10) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(\sqrt[n]{n^3} - 1)}{(\sqrt[n]{n^4} + 1) \log n}$ vale: (A) 3/4 ; (B) 0 ; (C) 3/2 ; (D) $+\infty$

11) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(3n)^{5n} - (5n)^{3n}}{n^8}$ vale: (A) 3/5 ; (B) -5/3 ; (C) $-\infty$; (D) $+\infty$

12) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \left(\sqrt[3]{1 - \frac{2}{n}} - \sqrt[3]{1 - \frac{3}{n}} \right)$ vale: (A) 1/3 ; (B) 1 ; (C) $-2/3$; (D) $+\infty$

13) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^2 \cdot \sin\left(\frac{3}{n}\right)}{\sqrt{n^4} - \sqrt{n^4 - 5n^3}}$ vale: (A) 3/5 ; (B) 6/5 ; (C) 0 ; (D) $+\infty$

14) Il limite $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2n)^n - n^{2n} \cdot 2^{-2n}}{(2e)^n - e^{2n}}$ vale: (A) 0 ; (B) $+\infty$; (C) $-\infty$; (D) nessuna delle precedenti

16) Calcolare il valore dei seguenti limiti al variare di α :

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n^n - n^{cn}}{2n^{4\alpha} - n^3}$; b) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(1 + \sin \alpha)^n}{\left(1 + \frac{\sin \alpha}{n}\right)^n}$ con $0 \leq \alpha \leq 2\pi$.

17) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^2 a_n \rightarrow 0$, $n^3 b_n \rightarrow 0$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} (a_n + b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - b_n) = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 a_n \cdot b_n = 0$

18) Date due successioni $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ tali che, quando $n \rightarrow +\infty$, si ha $n^4 a_n \rightarrow 1$, $n^3 b_n \rightarrow 1$, quale fra le seguenti affermazioni è falsa?

(A) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^3 (a_n + b_n) = 1$; (B) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^4 (a_n - b_n) = 0$; (C) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n^6 a_n \cdot b_n = 0$; (D) $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \frac{a_n}{b_n} = 1$

RISULTATI:

2) (A) ; 3) (A) ; 6) 1 ; 7) b) $-\infty$; c) $5/2$; d) non esiste ; g) 2 ; h) $+\infty$; i) $+\infty$; j) $+\infty$; k) $+\infty$; l) $+\infty$; m) $+\infty$;

o) 2 ; p) 3 ; r) $1/2$; t) $\sqrt{e}$; u) $e^{\frac{-\pi^2}{2}}$; x) $-\infty$; y) 1 ; v) 0 ; 10) (C) ; 11) (D) ;

12) (A) ; 13) (B) ; 14) (B) ; 16) a) $-\infty$ se $\alpha < 3/4$ e se $\alpha > 1$, $+\infty$ se $3/4 \leq \alpha < 1$, 0 se $\alpha = 1$; b) $+\infty$ se $0 < \alpha < \pi$, 0 se

$\pi < \alpha < 2\pi$, 1 se $\alpha = 0, \pi, 2\pi$; 17) (A) ; 18) (B) .

SERIE

1) Calcolare:

a) $\sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$; b) $\sum_{n=4}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{n!}$; c) $\sum_{n=6}^{+\infty} \frac{5}{(n-1)(n-2)}$.

2) Discutere la convergenza delle seguenti serie:

a) $\sum_n \left(\frac{4n+1}{3n+2}\right)^n$; b) $\sum_n \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n}\right)$; e) $\sum_n \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^n - 1\right)$; f) $\sum_n \left(\frac{n}{1+n\sqrt{1+n^3}}\right)$; g) $\sum_n \log\left(\frac{2+n^2}{1+n^2}\right)$; i) $\sum_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; l) $\sum_n \frac{(2n)!}{5^n \cdot (n!)^2}$; m) $\sum_n \cos\left(n\frac{\pi}{6}\right) \cdot \frac{1}{n^2}$; n) $\sum_n \frac{\sin(n) - 2\cos(2n)}{2^n}$; o) $\sum_n \frac{(-1)^n}{n - \sqrt{n}}$;
q) $\sum_n (-1)^n \left(1 - \cos\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$; s) $\sum_n \frac{\cos(n\pi)}{e^n - n^5}$; t) $\sum_n \frac{n^{\frac{1}{n+1}}}{\left(n + \frac{1}{n}\right)^n}$; w) $\sum_n (-1)^n \frac{4^n}{(n-4)!}$; x) $\sum_n \arctan\left(\frac{n+1}{n \cdot 2^n}\right)$; y) $\sum_n (-1)^n (\sqrt[n]{3} - 1)$.

3) Per quali valori di q (q reale positivo) converge la serie $\sum_n \frac{q^{n+\sin(n)} \cdot \sin(n)}{\sqrt{2+\sin(n)}}$?

4) Se $\alpha < 0$, la serie $\sum_n n^{-3\alpha} \cdot \sin(n^{4\alpha})$: (A) diverge per ogni $\alpha < 0$; (B) converge se $\alpha > -1$;
(C) converge se $\alpha < -1/4$; (D) converge se $\alpha < -1$.

5) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n \frac{2^{n\alpha}}{4^{(\alpha-2)n}}$?

(A) per ogni $\alpha > 4$; (B) per ogni $\alpha > 1$; (C) per ogni $\alpha < 1$; (D) per ogni $\alpha < -2$.

6) Per quali valori di α (α reale) converge la serie $\sum_n \left[n \sin(n^\alpha) + (2+\alpha)^{2n} \right]$?

(A) $\alpha < -2$; (B) $|\alpha + 2| < 1$; (C) $-3 < \alpha < -2$; (D) $-3 < \alpha < -2$ o $\alpha > -1$.

7) La serie $\sum_n \left(n^{\alpha-4} + |\alpha-1|^{-n} \right)$ è convergente se: (A) $3 < \alpha$; (B) $\alpha < 0$ o $2 < \alpha < 3$; (C) $1 < \alpha < 2$; (D) $1 < \alpha$

9) Studiare il carattere delle seguenti serie al variare del parametro α :

a) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot n + \sqrt{n}}{n^\alpha}$; b) $\sum_n (-1)^n \cdot n^\alpha \cdot \left(1 - e^{\frac{1}{n}}\right)$; c) $\sum_n \frac{(-1)^n \cdot n^\alpha \cdot \log \frac{n+1}{n}}{\sqrt[3]{n+1}}$; g) $\sum_n \frac{\alpha^n \cdot \cos n\pi}{n+1}$

- 10) Stabilire per quali valori di x le seguenti serie convergono: a) $\sum_n \frac{(6-2x)^n}{2^n \cdot (x-1)^{2n}}$; b) $\sum_n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)^x$
- 11) a) Calcolare $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\log(1+x^2)}{\log x}$. b) Posto $f(x) = \frac{\log(1+x^2)}{x \cdot \log x}$ e $a_n = f(n)$, determinare i valori di α per i quali risulta convergente la serie $\sum_n n^\alpha \cdot a_n$.
- 12) La serie $\sum_n \frac{2n^\alpha \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)}{n^4 + 2}$
- A) diverge per $\alpha > 6$; B) converge per $\alpha \leq 5$; C) diverge se $5 \leq \alpha < 6$; D) converge se $\alpha < 5$
- 14) Determinare per quali valori di x converge la serie $\sum_n \left(\frac{x+3}{x+4}\right)^n$ e calcolarne la somma.

RISULTATI:

- 1)** a) $1/12$; b) $e^{1/2} - 79/48$; c) $5/4$;
2) a) diverge; b) diverge ; e) diverge ; f) conv. ; g) conv. ;
 i) conv. ; l) conv. ; m) conv. ; n) conv. ; o) conv. ; q) conv. ; s) conv. ; t) div. ; w) conv. ; x) conv. ; y) conv. semplicemente ma non conv. Assolutamente. **3)** $q < 1$; **4)** (D) ; **5)** (A) ; **6)** (C) ; **7)** (B) ;
9) a) converge se $\alpha > 3/2$; b) converge assolutamente se $\alpha < 0$, converge semplicemente se $0 \leq \alpha < 1$; c) converge assolutamente per $\alpha < 1/3$, converge semplicemente per $1/3 \leq \alpha < 4/3$;
 g) converge assolutamente per $-1 < \alpha < 1$, diverge per $\alpha \leq -1$, converge semplicemente per $\alpha = 1$; **10)** a) converge per $x < -1$ o $x > 2$; b) converge per $x > 1/2$;
11) a) 2 ; b) $\alpha < 0$; **12)** D ; **14)** $x \in \left] -\infty, \frac{-7}{2} \right[$.

FUNZIONI CONTINUE DEFINITE SU UN INTERVALLO LIMITATO E CHIUSO

1) Stabilire se le seguenti affermazioni sono vere o false:

- a) Una funzione $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, può soddisfare la condizione $f([a, b]) = [\min f([a, b]), \max f([a, b])]$, senza essere continua su $[a, b]$.
- b) Una funzione $f(x)$ definita sull'intervallo $[0, +\infty[$ a valori reali, continua e tale che $\exists \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ (L valore finito), ha un valore massimo e un valore minimo.

c) La funzione $f(x) = \begin{cases} x + \frac{1}{2} & , \quad 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & , \quad x = \frac{1}{2} \\ x - \frac{1}{2} & , \quad \frac{1}{2} < x \leq 1 \end{cases}$

definita sull'intervallo limitato e chiuso $[0, 1]$ non ammette né massimo né minimo.

2) Enunciare la contronominale del teorema di Weierstass e la contronominale del teorema dell'esistenza degli zeri.

3) Data la funzione $f(x) = \log(x) + 2x - 3$, stabilire se ammette zeri e, in caso affermativo, determinarne il numero.

4) Verificare che la funzione $f(x) = 2e^x - x^2 + x - 3$ ammette uno zero nell'intervallo $[0, 1]$; calcolarne poi il valore con un errore massimo di 10^{-2} .

5) Verificare che la funzione $f(x) = \log_2 x - 3 \log_{\frac{1}{2}}(1+x) - 5$ ammette uno e un solo zero e calcolarne il valore approssimato con un errore $< 1/8$.

6) E' data una funzione $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ continua e tale che $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $f(-1) > 0$ e $f(1) < 0$, allora: (A) f ha almeno due zeri; (B) $f(c) = 0$ per qualche $c \in (-1, 1)$; (C) f si annulla almeno 3 volte; (D) nessuna delle precedenti.

7) La funzione $f(x) = \frac{3x}{e^x + 2}$

(A) non ha massimo perché il suo dominio non è un intervallo limitato e chiuso; (B) non è limitata superiormente su $(-\infty, 0]$; (C) ha massimo su $(-\infty, +\infty)$; (D) è crescente perché lo sono numeratore e denominatore.

RISULTATI

1) a) vera; b) falsa; c) vera; 3) uno zero in $[1, e]$; 4) 0,33594; 5) 1,75; 6) (A); 7) (C).

DERIVATE E APPLICAZIONI

1) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

- a) $f(x) = \sin^2 x + \cos x$; b) $f(x) = x^2 \cdot \sin^3 x$; c) $f(x) = (x + \sin x)^5$; d) $f(x) = x^3 \cdot e^x + \cos^3 x$;
e) $f(x) = \sin(\sin x)$; f) $f(x) = e^{x \cos x}$; g) $f(x) = e^{\sin x} + \cos(x + \sin x)$; h) $f(x) = e^{x^2} \cdot \cos x^2$; l) $f(x) = \sqrt{\frac{2x^2 + 1}{x^4 + 2}}$; m) $f(x) = \log \frac{1+x}{x^3}$.

2) Sia $f(x)$ da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ una funzione derivabile. Calcolare la derivata della funzione $g(x) = [x \cdot f(x)]^2$.

3) La derivata di $f(x) = \cos(e^{x^2})$ è:

- A) $f'(x) = -e^{x^2} \cdot \sin(e^{x^2})$; B) $f'(x) = -e^{-2x} \cdot \sin(e^{x^2})$;
C) $f'(x) = -2x \cdot e^{x^2} \cdot \sin(e^{x^2})$; D) $f'(x) = -2x \cdot \sin(e^{x^2})$

6) Data la funzione $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2 & x \leq c \\ 3ax + b & x > c \end{cases}$ determinare a, b in funzione di c affinché esista $f'(c)$.

7) Discutere la derivabilità in $\mathbb{R}$ della seguente funzione: $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{1+e^{\frac{1}{x}}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$

8) Determinare il valore dei parametri a e b in modo che la funzione $f(x)$ abbia derivata prima continua su

tutto $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} e^{1-x} - ax & x \leq 1 \\ bx^2 + 3x - 3 & x > 1 \end{cases}$

9) La funzione $f(x) = \begin{cases} a \sin(2x) + b \cos(3x) + x, & x \leq 0 \\ ae^x + b \arctan\left(\frac{x}{2}\right) + 1, & x > 0 \end{cases}$ è derivabile se e solo se a e $b \in \mathbb{R}$ verificano:

A) a qualsiasi, $b = 2a + 2$; B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) $a = -1$ e $b = 0$; D) $a = 1$ e $b = 2$.

10) Determinare il valore dei parametri a, b e c in modo che la funzione $f(x)$ abbia derivata seconda

continua su tutto $\mathbb{R}$: $f(x) = \begin{cases} ax + b + x^2 & x < 1 \\ ce^{x-1} + x^3 & x \geq 1 \end{cases}$

11) Quale fra le seguenti proposizioni è vera?

- (A) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f'(x)$ continua in $[-1, 1]$;
(B) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f(x)$ ha massimo su $[-1, 1]$;
(C) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f(x)$ ha limite per $x \rightarrow -1^+$;
(D) $f(x)$ derivabile in $[-1, 1] \Rightarrow f(x)$ inferiormente limitata.

12) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = \log(2 + x^2)$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = -1$.

13) Determinare l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = (x + 2)^{x+3}$ in corrispondenza del punto di ascissa $x_0 = 0$.

14) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f(x) = x^3$ nel punto di ascissa x_0 . Il grafico della cubica $f(x) = x^3$ si trova sempre al di sopra delle sue rette tangenti?

15) Sia $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$, allora:

- A) $f(x)$ ha minimo su $]0, +\infty[$; B) $f(x) \rightarrow -\infty$ quando $x \rightarrow -\infty$;
C) $f(x)$ ha massimo su $\mathbb{R}$; D) $f(x)$ è decrescente in $] -\infty, 0[$.

16) Sia $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tale che : $f(0) = 1$, $f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$ e $f^{iv}(0) = -2$.

Quale fra le seguenti risposte è certamente vera?

- A) $x = 0$ è punto di massimo assoluto; B) nessuna delle altre risposte è vera ;
 C) $x = 0$ è punto di minimo relativo ; D) $x = 0$ è punto di flesso.
- 17) Se $f: [0, 1] \cup [2, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ ha derivata sempre maggiore di 5, allora:
 A) $f(1) > 5 + f(0)$; B) f è crescente ; C) $f(3) > 5 \cdot f(0)$; D) $\frac{f(3) - f(0)}{3} > 5$
- 18) Provare che la funzione $f(x) = \arctan(x) + \log(x)$ è invertibile nel suo dominio e calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $\pi/4$.
- 19) Data la funzione $f(x) = x + \log x + e^x$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $x = e + 1$.
- 20) Data la funzione $f(x) = \log x - \frac{1}{\log x}$, calcolare la derivata di $f^{-1}(x)$ in $x = 0$.
- 21) La funzione inversa di $f(x) = 3x + \cos x$: (A) è derivabile su $\mathbb{R}$; (B) è $f^{-1}(y) = 1/3 y + \arccos y$;
 (C) è $f^{-1}(y) = \frac{1}{3y + \cos y}$; (D) non esiste perché la funzione $\cos(x)$ è periodica.
- 22) Data la funzione $f(x) = 5x + x^3 + 2x^5$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel suo punto di ascissa 8.
- 23) Data la funzione $f(x) = 4x - \sin x + 5$, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $f^{-1}(x)$ nel suo punto di ascissa $4\pi + 5$.
- 24) Data la funzione $f(x) = 12x - 2x^3 - 3x^2 - 1$, determinare, al variare del parametro k , il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x) = k$.
- 25) Sia $f(x)$ funzione da $\mathbb{R}$ ad $\mathbb{R}$ con derivata seconda continua in $\mathbb{R}$; se $g(x) = x \cdot f(x)$ ha minimo locale in $x = 0$, allora:
 (A) $f(0) = 0$ e $f'(0) = 0$; (B) $f(0) = 0$ e $f''(0) > 0$;
 (C) $f(0) = 0$ e $f'(0) \geq 0$; (D) $f(x)$ ha minimo locale in $x = 0$.
- 26) Data la funzione $f(x) = x^2$, verificare che il grafico della curva sta sopra la retta tangente nel punto del grafico di coordinate $(1, f(1))$. Dimostrare che questo accade per ogni punto del grafico di coordinate $(x_0, f(x_0))$.
- 27) Dimostrare che, se $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ è una funzione convessa, derivabile, con $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$, si ha $f(x) \geq x \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

RISULTATI:

- 3) C ; 6) $a = 2/3 c$, $b = 2 - c^2$; 7) non deriv. in $x = 0$; 8) $a = 6$, $b = -5$; 9) C ; 10) $a = -3$, $b = -1$, $c = -4$;
 11) (B) ; 12) $y = \log 3 - 2/3 - 2/3 x$; 13) $y = 8 + 8(\log 2 + 3/2)x$; 14) $y = 3x_0^2 x - 2x_0^3$, no ; 15) C ; 16) B ; 17) A ; 18) $2/3$;
 19) $1/(2 + e)$; 20) $1/(2e)$; 21) (A) ; 22) $y = 1/18 x + 5/9$; 23) $x - 5y + \pi - 5 = 0$;
 24) 1 soluz. per $k < -21$ e per $k > 6$, 3 soluz. per $-21 < k < 6$, 2 soluz. per $k = -21$ e per $k = 6$; 25) (C) .

STUDIO DI FUNZIONE

- 1) Data la funzione $f(x) = 3x^5 - 50x^3 + 135x$, determinare il numero di radici reali dell'equazione $f(x) + k = 0$, al variare di $k \in \mathbb{R}$.
- 2) Trovare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni dell'equazione: $x^4 + 3x^3 - 5x^2 = 3x + k$.
- 3) Trovare il numero di soluzioni dell'equazione $2x^3 - 3x^2 - 36x + \alpha = 0$, ($\alpha \in \mathbb{R}$).
- 4) Data la funzione $f(x) = \frac{x(2-x)}{8+2x^2}$, disegnarne l'andamento qualitativo e determinare al variare di $T \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = T$.
- 5) Studiare le seguenti funzioni e disegnarne il grafico:
 - a) $f(x) = x^4 + 2x^3 - 2x - 1$;
 - b) $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 8x^{\frac{1}{3}}$;
 - c) $f(x) = \frac{x^2}{x^2 - |x+2|}$;
 - d) $f(x) = x^2 - 2x + 2\log|1+x|$;
 - e) $f(x) = 2x + 2 - 3 \cdot \sqrt[3]{(x+1)^2}$;
- 6) Studiare la funzione $f(x) = \min \left\{ 5, \frac{x^2}{|x-1|} \right\}$ e disegnarne il grafico.
- 7) Studiare la funzione $f(x) = \ln(x) - \arctan(x-1)$, tralasciando lo studio della derivata seconda. Determinare poi il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) - \ln k = 0$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- 8) Studiare la funzione $f(x) = (1-x) \cdot \sqrt{2x+3} \cdot e^{-x}$, tralasciando lo studio della derivata seconda. Determinare inoltre il numero delle soluzioni dell'equazione $2f(x) + k = 0$ al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- 9) Studiare la funzione $f(x) = e^{\frac{1}{x^2}} \cdot (x-6)$, determinando dominio, segno, limiti agli estremi del campo di esistenza, intervalli di monotonia, eventuali massimi e minimi locali. Disegnare il grafico della funzione e trovare il numero di soluzioni dell'equazione $f(x) = k$, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$.
- 10) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di intersezioni della retta di equazione $y = -2x + k$ con il grafico della funzione $f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$.
- 11) Determinare, al variare del parametro $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni $x > 0$ dell'equazione $f(x) = k$ dove $f(x) = x^6 - 18x^3 + 16 \log x^3$.
- 13) Dimostrare che il grafico della funzione $f(x) = x^{100} + ax + b$ interseca l'asse delle ascisse al massimo in due punti.

RISULTATI:

1) 1 soluz. per $k < -216$ e per $k > 216$, 2 soluz. per $k = -216$ e per $k = 216$, 3 soluz. per $-216 < k < -88$ e per $88 < k < 216$, 4 soluz. per $k = -88$ e per $k = 88$, 5 soluz. per $-88 < k < 88$; **2)** 1 soluz. per $k = -36$, 2 soluz. per $-36 < k < -4$ e per $k > 101/256$, 3 soluz. per $k = -4$ e per $k = 101/256$, 4 soluz. per $-4 < k < 101/256$; **3)** 1 soluz. per $\alpha < -44$ e per $\alpha > 81$, 2 soluz. per $\alpha = -44$ e per $\alpha = 81$, 3 soluz. per $-44 < \alpha < 81$; **4)** asintoto $y = -1/2$,

$\min \left(-2 - 2\sqrt{2}, -\frac{1+\sqrt{2}}{4} \right), \max \left(-2 + 2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{2}-1}{4} \right)$, 1 soluz. per $T = -\frac{1+\sqrt{2}}{4}$, $T = \frac{\sqrt{2}-1}{4}$, $T = -1/2$,
 2 soluz. per $-\frac{1+\sqrt{2}}{4} < T < -1/2$ e per $-1/2 < T < \frac{\sqrt{2}-1}{4}$; **5)** a) $\min(1/2, -27/16)$, $F_1(-1, 0)$, $F_2(0, -1)$;
 b) $\min(2, -6\sqrt[3]{2})$, $F_1(-4, 12\sqrt[3]{4})$, $F_2(0, 0)$; c) $\max(0, 0)$, $\max(-4, 8/7)$, $\min(8-2, 1)$, $x = -1$ e $x = 2$ asintoti
 verticali, $y = 1$ asintoto orizzontale; d) $F_1(-2, 8)$, $F_2(0, 0)$; e) $f(x)$ crescente per $x < -1$ e per $x > 0$, $x = 0$ min.
 locale, $x = -1$ max. locale, $f(x)$ convessa $\forall x \neq -1$; **6)** $\min_1(0, 0)$, $\min_2(2, 4)$, funzione costante $f(x) = 5$ per
 $x \leq \frac{-5-3\sqrt{5}}{2}$, per $\frac{-5+3\sqrt{5}}{2} \leq x \leq \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ e per $x \geq \frac{5+\sqrt{5}}{2}$; **7)** $\max(1, 0)$, $\min(2, \ln 2 - \pi/4)$
 ; $0 < k < 2e^{-\frac{\pi}{4}}$ e $k > 1$ una soluzione, $k = 2e^{-\frac{\pi}{4}}$ e $k = 1$ due soluzioni, $2e^{-\frac{\pi}{4}} < k < 1$ tre soluzioni; **8)** $\max$
 $\left(\frac{1-\sqrt{11}}{2}, \frac{1+\sqrt{11}}{2} \cdot \sqrt{4-\sqrt{11}} \cdot e^{\frac{\sqrt{11}-1}{2}} \right)$, $\min \left(\frac{1+\sqrt{11}}{2}, \frac{1-\sqrt{11}}{2} \cdot \sqrt{4+\sqrt{11}} \cdot e^{\frac{-\sqrt{11}-1}{2}} \right)$; **9)** una soluzione
 per $k < -4 \cdot e^{-1/4}$ e per $k \geq 0$, due soluz. per $k = -4 \cdot e^{-1/4}$, tre soluz. per $-4 \cdot e^{-1/4} < k < 0$;
10) $k < 7$ una soluzione, $k = 7$ due soluz., $k > 7$ tre soluz.; **11)** per $k < 48\log 2 - 80$ o $k > -17$ una soluzione,
 per $k = 48\log 2 - 80$ e $k = -17$ due soluz., per $48\log 2 - 80 < k < -17$ tre soluz.

POLINOMI DI TAYLOR

- 1) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 3 centrato in $x_0 = 1$ per $f(x) = e^x$
- 2) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine 4 centrato in $x_0 = \pi/4$ per $f(x) = \sin x$
- 3) Scrivere lo sviluppo di Taylor di ordine n centrato in $x_0 = 2$ per $f(x) = 1 + 2x - x^4/3 + x^5$
- 4) Uno sviluppo di Taylor della funzione $f(x) = \frac{\log(1+3x)}{2x+1}$ nel punto $x_0 = 0$ è : A) $3x - 3/2 x^2 + o(x^2)$;
B) nessuna delle altre risposte è vera ; C) $3x - 21/2 x^2 + o(x^2)$; D) $3x + 3/2 x^2 + o(x^2)$.
- 5) Se una funzione $f(x)$ ha in $x_0 = 0$ un punto di minimo locale, allora un suo sviluppo di Taylor centrato in tale punto può essere: A) $f(x) = x + x^2 + o(x^2)$; B) $f(x) = 1 - 5x^2 + o(x^2)$;
C) $f(x) = -3 + 2x^4 + o(x^4)$; D) $f(x) = 1 + 3x^3 + o(x^3)$
- 6) Studiare il comportamento locale della funzione $f(x) = 1 - (x-2)^2 + 1/4 \cdot (x-2)^3 + o((x-2)^3)$ in un intorno del punto $x_0 = 2$, stabilendo in particolare se si tratta di un punto stazionario e in caso affermativo determinarne il tipo.
- 7) Sono date le funzioni $f(x) = ax + bx^2 + o(x^5)$ per $x \rightarrow 0$ e $g(x) = f(\sin x) - ax + 1/3 \cdot (x^2 + x^3)$ con $a, b \in \mathbb{R}$. Determinare i valori dei parametri a e b per i quali la funzione $g(x)$ ammette in $x_0 = 0$ un punto di massimo locale o un punto di minimo locale o un punto di flesso
- 11) Approssimare il valore di $e^{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$
- 12) Approssimare il valore di $\frac{1}{\sqrt{2}}$ con un errore $< 10^{-3}$
- 13) Dopo aver calcolato il polinomio di Taylor $P(x)$ di ordine 3 centrato in $x_0 = 0$ della funzione $f(x) = 2 \cdot (1+x)^{1/3}$, calcolare il valore di $P(1/8)$ e stimare l'errore commesso.

RISULTATI

- 1) $\frac{e}{6}(x^3 + 3x + 2) + o((x-1)^2)$;
- 2) $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{6\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \frac{1}{24\sqrt{2}}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{4}\right)^4\right)$;
- 3) $\frac{95}{3} + \frac{214}{3}(x-2) + 72(x-2)^2 + \frac{112}{3}(x-2)^3 + \frac{29}{3}(x-2)^4 + (x-2)^5 + o(x^n)$; 4) C ; 5) C ; 6) $x_0 = 2$ punto di massimo locale; 7) $b > -1/3$, $\forall a$, $x_0 = 0$ minimo locale; $b < -1/3$, $\forall a$, $x_0 = 0$ massimo locale ; $b = -1/3$, $a \neq 2$, $x_0 = 0$ punto di flesso; $b = -1/3$, $a = 2$, $x_0 = 0$ minimo locale; 11) 4,11324044 con $n = 3$; 12) 0,70733... con $n = 5$ 13) 2,0800... ; 5/248832 .

INTEGRALI INDEFINITI: ricerca delle primitive

1) Calcolare i seguenti integrali indefiniti:

a) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-1}} dx$; b) $\int \frac{2}{\sin x} dx$; c) $\int \frac{2x^4 + 3x^3}{x^2 + 3} dx$; d) $\int \frac{x+1}{x^2 - 2x + 4} dx$; e) $\int \frac{\operatorname{arctg} e^x}{e^x + e^{-x}} dx$;

f) $\int \frac{\operatorname{tg}^3 x + \operatorname{tg} x}{\operatorname{tg} x + 4} dx$; g) $\int x e^x \sqrt{e^x - 1} dx$; h) $\int \frac{1}{2\sin^2 x + 3\cos^2 x} dx$; i) $\int \left(\frac{1}{\sqrt[4]{5-x}} + \sqrt{5-x} \right) dx$

m) $\int \frac{3\cos x}{3\sin^2 x + 5\sin x - 2} dx$; n) $\int \frac{2x-1}{x^2} \ln x dx$; o) $\int \frac{e^x + e^{4x}}{e^{2x} + 1} dx$;

p) $\int \frac{\log(2x+1)}{(2x+1)^2} dx$; q) $\int \frac{x + \sqrt{x-1}}{x-5} dx$; s) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$;

v) $\int \frac{1+x}{\cos^2 x} dx$; w) $\int e^{-\sqrt{x}} dx$.

2) Quale è la funzione $f(x)$ tale che $f'(x) = e^{x^2} \cdot (2x^2 + 2x + 1)$?

- (A) $e^{x^2} \cdot (x+1) - 2$; (B) $e^{x^2} \cdot (2x^2 - 2x + 3)$;
(C) $e^{x^2} \cdot (2x^3 / 3 + x^2 + x)$; (D) nessuna delle precedenti .

3) Quale delle seguenti uguaglianze è corretta?

- (A) $\int e^x \sin x dx = -e^x \cos x + c$; (B) $\int \sin \sqrt{x} dx = -\cos \sqrt{x} + c$;
(C) $\int \frac{\sin(e^{-x})}{e^x} dx = \cos(e^{-x}) + c$; (D) $\int \log x dx = x \log x + c$.

4) Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{3x}{(1+x^3)^2} - \frac{x}{1+x^3}$ è :

- (A) $\frac{x^2}{1+x^3}$; (B) $\frac{x}{1+x^3}$;
(C) $\frac{x+3}{1+x^3}$; (D) nessuna delle altre risposte è vera.

5) Una primitiva della funzione $(x^3 + 3x) \cdot e^{2x}$ è:

- (A) $\frac{1}{8}(4x^3 + 6x^2 - 9x + 1) \cdot e^{2x}$; (B) $\frac{1}{8}(4x^3 - 6x^2 + 18x - 9) \cdot e^{2x}$;
(C) $\frac{1}{8}(4x^3 - 6x^2 - 2x + 1) \cdot e^{2x}$; (D) nessuna delle precedenti.

6) Una primitiva della funzione $f(x) = \frac{e^{3x} - 1}{e^{2x} + 1}$ è:

- (A); $-1/2 \log(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg}(e^x) + e^x + x$; (B) $(e^{3x} - 1) \cdot \log(e^{2x} + 1)$;
(C) $-1/2 \log(e^{2x} + 1) + e^x + x$; (D) $1/2 \log(e^{2x} + 1) - \operatorname{arctg}(e^x) + e^x - x$.

7) Una primitiva di $f(x) = (x+1) \cdot \sin(2x)$ è :

- A) $-(x+1)\cos(2x)$; B) $-1/2 \cdot (x+1)\cos(2x)$;
C) $(x^2/2 + x)\sin(2x)$; D) $1/4 \cdot \sin(2x) - 1/2 \cdot (x+1)\cos(2x)$.

8) Trovare la primitiva della funzione $f(x) = x \sin x + \cos^2 x$ che si annulla per $x = \pi/2$.

RISULTATI

1) a) $2 \arctg \sqrt{2x-1} + c$; b) $2 \log \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + c$; c) $\frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x - \frac{9}{2} \log(x^2 + 3) + 6\sqrt{3} \arctg \frac{x}{\sqrt{3}} + c$;

d) $\frac{1}{2} \log(x^2 - 2x + 4) + \frac{2}{\sqrt{3}} \arctg \frac{x-1}{\sqrt{3}} + c$; e) $\frac{1}{2} \arctg^2 e^x + c$; f) $\operatorname{tg} x - 4 \log |\operatorname{tg} x + 4| + c$;

g) $\frac{2}{3} \sqrt{e^x - 1} \left[e^x \left(x - \frac{2}{3} \right) + \frac{8}{3} - x \right] - \frac{4}{3} \arctg \sqrt{e^x - 1} + c$; h) $\frac{1}{6} \sqrt{6} \arctg \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \operatorname{tg}(x) \right) + c$;

i) $-\frac{2}{3} \left(2\sqrt[4]{(5-x)^3} + (5-x)\sqrt{5-x} \right) + c$; m) $\frac{3}{7} \log \left| \frac{3 \sin x - 1}{\sin x + 2} \right| + c$;

n) $\log^2 x + \frac{1}{x} (\log x + 1) + c$; o) $\frac{1}{2} e^{2x} - \frac{1}{2} \log(e^{2x} + 1) + \arctg e^x + c$; p) $\frac{-1}{2(2x+1)} [1 + \log(2x+1)] + c$;

q) $x - 1 + 2\sqrt{x-1} + 7 \log |\sqrt{x-1} - 2| + 3 \log |\sqrt{x-1} + 2| + c$;

s) $\frac{1}{2} \arcsin x - \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + c$;

v) $(1+x) \operatorname{tg} x + \log |\cos x| + c$; w) $-2e^{-\sqrt{x}} (\sqrt{x} + 1) + c$. 2) (A); 3) (C); 4) (A); 5) (B); 6) (D); 7) (D); 8) $-x \cos x + \sin x + 1/2 x + 1/4 \sin(2x) - 1 - \pi/4$.

FUNZIONE INTEGRALE E INTEGRALI DEFINITI

1) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali definiti:

a) $\int_{-1}^1 \frac{x^{\frac{2}{3}}}{1+x^{\frac{2}{3}}} dx$; b) $\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}} dx$; c) $\int_0^1 \frac{2+(x+1)\sqrt{x}}{2+x} dx$; d) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \frac{\cos x}{1+4\sin^2 x} dx$;

2) L'integrale $\int_{\frac{1}{e}}^e \frac{(\log \log x)^3}{x \log x} dx$

(A) vale $1/4$; (B) vale 0 ;
(C) vale $1/2$; (D) vale $(e - 1/e)$.

3) L'integrale $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cdot \sin x dx$ vale :

(A) $\frac{\pi}{2} - 1$; (B) -1 ;
(C) 0 ; (D) 1

4) L'integrale $\int_1^e \frac{\arctg(\log x)}{x} dx$ vale :

(A) $\frac{\pi}{4} - \log \sqrt{2}$; (B) $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{e}$;
(C) 2π ; (D) $\frac{\arctg 1}{e}$.

5) Calcolare $\int_{-1}^1 |e^{-x} - 2| dx$.

6) Calcolare $F(x) = \int_0^x f(t) dt$, dove $f(t) = -\frac{\sin 2t}{1 + \sin^2 t}$.

7) Calcolare la derivata prima delle seguenti funzioni:

a) $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} \sqrt{1-t^2} dt$; b) $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{e^t}{t} dt$; c) $F(x) = \int_x^{x^2} \sqrt{te^t} dt$

8) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_{\sin x}^{\cos x} e^t dt$ nel suo punto di ascissa 0 .

9) Scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $F(x) = \int_{2x}^{x^2} \frac{\sin t}{t} dt$ nel suo punto di ascissa 2 .

10) Data la funzione $F(x) = \int_1^x e^{t^2} \cdot (\sin t + 3) dt$, stabilire se è invertibile e, in caso affermativo, calcolare $(F^{-1})'(0)$.

11) Dopo aver verificato che la funzione $F(x) = \left(\int_1^x e^{2t-t^2} dt - 1 \right)$ è invertibile, detta $G(x)$ la sua inversa, scrivere l'equazione della retta tangente al grafico di $G(x)$ nel suo punto di ascissa -1 .

12) Determinare il minimo valore assunto dalla funzione $f(x) = \int_0^x (t^3 - 2t) \cdot e^{-t} dt$.

13) Determinare il numero delle soluzioni dell'equazione $2x - \frac{1}{2} \int_0^x e^{-t^2} dt = 1$.

14) Il limite $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\left(\int_0^x e^{-2t^2} dt \right) - x}{x^3}$ vale:

- (A) $1/6$; (B) $-2/5$;
(C) $-2/3$; (D) $-\infty$.

15) Calcolare i seguenti limiti: a) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\log x} \left(x - \int_1^x e^{\frac{1}{t}} dt \right)$; b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \int_x^{2x} \frac{\sin t}{t} dt$; c) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_0^x \frac{5+2t - \sin t}{1+3t^2} dt}{\log(3+2x)}$

16) Date le funzioni a) $F(x) = \int_1^x \frac{e^t}{t} dt$ e b) $\int_2^{x^2+1} \sin(t^2) dt$ scrivere per ciascuna di esse il polinomio di Taylor di grado 3 per a) e di grado 2 per b) centrato in $x_0 = 1$ e disegnare un grafico qualitativo di F nell'intorno di $x_0 = 1$.

17) Data la funzione $F(x) = \int_x^{x+1} \frac{1}{t^2 + t + 1} dt$, $\forall x \in \mathbb{R}$

a) disegnare un grafico approssimativo di F

b) determinare al variare di $k \in \mathbb{R}$ il numero di soluzioni dell'equazione $F(x) = k$.

RISULTATI

1) a) $6 \left(-\frac{2}{3} + \frac{1}{4} \pi \right)$; b) $4 - 2\sqrt{e}$; c) $-\frac{4}{3} + \log \frac{9}{2} + 2\sqrt{2} \arctan \frac{\sqrt{2}}{2}$; d) $\frac{\pi}{8}$; 2) (B); 3) (D); 4) (A)

5) $-4 + 4\log 2 + e + 1/e$; 6) $F(x) = -\log(1 + \sin^2 x)$; 7) a) $-|\sin x| \cdot \sin x - |\cos x| \cdot \cos x$; b) $\frac{1}{x} (2e^{x^2} - e^{2x})$;

c) $2x|x| \sqrt{e^{x^2}} - \sqrt{x} e^x$; 8) $y = -x + e - 1$; 9) $y = (\sin 4)/2 \cdot (x - 2)$; 10) $\frac{1}{e(\sin 1 + 3)}$; 11) $y = \frac{1}{e}(x + 1) + 1$;

12) $4 - e^{\sqrt{2}} (10 - 6\sqrt{2})$; 13) una soluzione $\in]0, 1[$; 14) (C); 15) a) -1 ; b) 1 ; c) $2/3$;

16) a) $P_3(x) = e(x - 1) + e/6 (x - 1)^3$; b) $P_2(x) = (2\sin 4)(x - 1) + 1/2 (2\sin 4 + 16\cos 4)(x - 1)^2$;

17) due sol. se $0 < k < \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, una sol. se $k = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$, zero sol. altrove.

INTEGRALI GENERALIZZATI

1) Sia $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua tale che $f(0) = 0$ e $f(x) \rightarrow -1$ per $x \rightarrow +\infty$. Allora:

(A) $\int_0^{+\infty} f = -\infty$; (B) $\int_0^{+\infty} f = -1$;

(C) $\int_0^{+\infty} f = 0$; (D) non si può stabilire se f sia integrabile in senso generalizzato o no.

2) Studiare la convergenza dei seguenti integrali:

a) $\int_1^{+\infty} \frac{x}{1+x^6} dx$; b) $\int_0^1 \frac{t \cos t - \log(1+t)}{t^2} dt$;

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2} - x}{\sqrt{x}} dx$; d) $\int_0^1 \frac{1}{\log x} dx$; f) $\int_0^1 \left(\frac{e^x}{\sin x} - \frac{1}{x} \right) dx$

3) Calcolare, se esistono, i seguenti integrali:

b) $\int_0^{+\infty} \frac{e^{2x}}{(1+e^x)^3} dx$; c) $\int_0^{\pi^2} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}} \right) \cos \sqrt{x} dx$;

d) $\int_0^2 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx$.

4) Determinare $\alpha \in \mathbb{R}$ tale che i seguenti integrali convergano:

a) $\int_0^{+\infty} \frac{(\log x)^3}{\sqrt{x} \cdot (x+2)^\alpha} dx$; b) $\int_0^1 \frac{x^\alpha}{\log(1+x^4)} dx$;

c) $\int_0^{+\infty} \frac{\arctg x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} dx$; d) $\int_2^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{e^x - e^2} \cdot (x-2)^\alpha}$;

e) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} \cdot \log^\alpha(x+2) dx$; g) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x \cdot (x^2+x^{-2})^{\alpha/2}} dx$

6) Sia $f(x) = \sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+x}$

a) determinare $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$;

b) determinare per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ converge $\int_0^{+\infty} \frac{f(x)}{x^\alpha} dx$.

7) Date le funzioni: a) $F(x) = \int_4^x \frac{e^t}{1+\sqrt{t(10-t)}} dt$, b) $F(x) = \int_2^x \frac{e^t}{1+\sqrt{t^2-t}} dt$, c) $F(x) = \int_1^x \frac{\cos(t)}{\sqrt[3]{t+1}} dt$

stabilire quale è l'insieme di definizione D_F di ciascuna di esse. Per le funzioni a) e b) specificare in quale sottoinsieme di D_F la funzione F è positiva e in quale è negativa.

8) Determinare il comportamento per $x \rightarrow +\infty$ delle seguenti funzioni:

a) $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{\sqrt{t+2}} dt$; b) $F(x) = \int_0^x \frac{2t^2 + \log(t+1)}{t^2 + e^{-t}} dt$

9) Data la funzione $f(x) = \frac{3x^2 + 11}{x^3 + 4x + 3}$ sia $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ la sua funzione integrale. Dopo aver provato che $F(x) \rightarrow +\infty$ per $x \rightarrow +\infty$, calcolare (se esiste) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{\log(x^2 + 1)}$.

10) Studiare la funzione $F(x) = \int_0^x f(t) dt$ dove $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt[3]{t}}, & t < 0 \\ \frac{1}{\sqrt{t}}, & t > 0 \end{cases}$.

11) Per ogni $x \in \mathbb{R}$ sia $F(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{(1+t^2)(1+\arctan^2 t)} dt$

a) disegnare un grafico approssimativo di F , studiandone in particolare gli intervalli di monotonia e i limiti agli estremi del dominio.

b) determinare per quali valori di $k \in \mathbb{R}$ l'equazione $F(x) = k$ ha soluzione.

RISULTATI

1) (A) ; **2)** a) converge ; b) converge ; c) converge ; d) diverge; f) converge ; **3)** b) $3/8$; c) -4 ; d) 6 ; **4)** a) $\alpha > 1/2$; b) $\alpha > 3$; c) $1/5 < \alpha < 2/3$; d) $\alpha < 1/2$; e) $\alpha < 0$; g) $\alpha > 0$;

6) a) 1 , b) $1 < \alpha < 3/2$; **7)** a) $D_F = [0 ; 10]$; $F(x) > 0$ per $4 < x \leq 10$, $F(x) = 0$ per $x = 4$, $F(x) < 0$ per $0 \leq x < 4$;

b) $D_F = [1 ; +\infty)$, $F(x) > 0$ per $x > 2$, $F(x) = 0$ per $x = 2$, $F(x) < 0$ per $1 \leq x < 2$; c) $D_F = \mathbb{R}$; **8)** a) F ha un asintoto orizzontale per $x \rightarrow +\infty$; b) F ha per $x \rightarrow +\infty$ un asintoto obliquo di $m = 2$; **9)** $3/2$;

11) una soluzione se $0 < k < 2\arctan(\pi/2)$.