Sia data $f(x)$ ed il sviluppo di Taylor centrato in x_0 sino all'ordine 2

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2} + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^2\right)$$

Pb 1 Supponiamo che $f'(x_0) = 0$ e $f''(x_0) > 0$
Cosa posso dire riguardo a x_0?

Posso dire che x_0 è pto di minimo relativo
infatti,

$$f(x) - f(x_0) = f''(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^2}{2} + o\left((x-x_0)^2\right)$$

allora, per $x \neq x_0$ si ha

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2} + o(1;x_0)$$

Ma $\lim_{x\to x_0} o(1;x_0) = 0$ quindi

$$\exists\,\delta > 0 \quad : \quad |o(1;x_0)| < \frac{f''(x_0)}{4} \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$$

Dunque

$$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\} \quad \frac{f''(x_0)}{4} < \frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^2} < \frac{3}{4}\,\frac{f''(x_0)}{4}$$

Dunque $\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$ $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)} > 0$

Dunque $f(x) - f(x_0) > 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$

Dunque x_0 è punto di minimo relativo

Pb 2 $$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \underset{x\to x_0}{o}\left((x-x_0)^2\right)$$

con $f''(x_0) < 0$: cosa posso dire del punto x_0?

Se $f'(x_0)=0$ allora x_0 punto di max relativo (si ragiona come prima ma con disug. invertite)

Se $f'(x_0)\neq 0$ allora osservo che

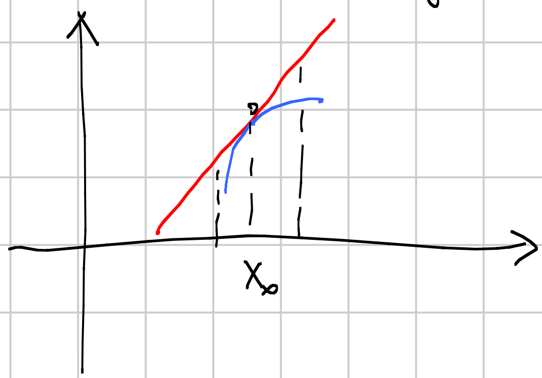
$$f(x)-f(x_0)-f'(x_0)(x-x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}\cdot(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$f(x)-(\text{retta Tangente}) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)$$

$$\frac{f(x)-(\text{retta Tangente})}{(x-x_0)^2} = \frac{f''(x_0)}{2}+o(1;x_0)$$

Abbiamo supposto $f''(x_0)<0$ allora scopriamo che

$$f(x)-(\text{retta Tangente})<0 \quad \forall x\in\,]x_0-\delta,x_0+\delta[\setminus\{x_0\}$$



questo non sorprende poiché $f''(x_0)<0$ significa che f è localmente concava

Exercizio $f(x)$ derivabile 30 volte in x $\forall x\in I$ intervallo

Se $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(29)}(x_0)=0$
e $f^{(30)}(x_0)>0$

allora x_0 è un punto di minimo relativo

dice

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f^{(30)}(x_0)}{30!}(x-x_0)^{30}+o((x-x_0)^{30}) \quad x\to x_0$$

dunque

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{30}} = \frac{f^{(30)}(x_0)}{30!} + o(1) \quad x \to x_0$$

dunque $\exists \delta > 0 : \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{30}} > 0$

$\forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

dunque $f(x)-f(x_0) > 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

dunque x_0 p.to di minimo relativo ▨

Esercizio $f(x)$ derivabile 71 volte in x

$\forall x \in I$ intervallo

Se $f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(70)}(x_0)$ e $f^{(71)}(x_0) < 0$

allora x_0 non è né di minimo

" " massimo relativo

e la funzione è localmente decrescente

dim

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f^{(71)}(x_0)}{(71)!} \cdot (x-x_0)^{71} + o((x-x_0)^{71})$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{71}} = \frac{f^{(71)}(x_0)}{(71)!} + o(1) \quad x \to x_0$$

Dunque $\exists \delta > 0 : \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)^{71}} < 0 \quad \forall x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\setminus \{x_0\}$

ma attenzione: $(x-x_0)^{71} \begin{cases} < 0 & x_0-\delta < x < x_0 \\ > 0 & x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$

dunque $f(x)-f(x_0) \begin{cases} > 0 & x_0-\delta < x < x_0 \\ < 0 & x_0 < x < x_0+\delta \end{cases}$

dunque f è localmente decrescente in un intorno di x_0 ed ho la tesi ▨

Esercizio Studiare la convergenza di

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{\operatorname{sen} x} - \frac{1}{x}\right) dx$$

dim

$f(x) = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x}$ è positiva e

continua $\forall x \in]0, 1]$

Per $x \to 0^+$, $f(x)$ diventa una forma indet. $0/0$

Essendo $f > 0$, si ha che $\lim_{\alpha \to 0^+} \int_\alpha^1 f(x)dx$ esiste

finito o infinito

Devo (voglio) studiare il comportamento asintotico di $f(x)$ per $x \to 0$

$$f(x) = \frac{x - \operatorname{sen} x}{x \cdot \operatorname{sen} x} = \frac{\cancel{x} - \left(\cancel{x} - \frac{x^3}{6} + o(x^4)\right)}{x \cdot (x + o(x^2))}$$

$$= \frac{\frac{x^3}{6} + o(x^4)}{x^2 + o(x^3)} = \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} \cdot \frac{\frac{x}{6} + o(x^2)}{1 + o(x)} =$$

$$= \frac{\frac{x}{6} + o(x^2)}{1 + o(x)} \sim \frac{x}{6} \qquad x \to 0$$

infatti

$$\left(\lim_{x \to 0} \frac{\frac{x}{6} + o(x^2)}{1 + o(x)} \cdot \frac{6}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{6} + o(x)}{1 + o(x)} \cdot 6 = 1\right)$$

Osservo che $\int_0^1 \frac{x}{6} dx$ esiste finito (è un integrale proprio!), dunque per il Teorema del confronto asintotico esiste $\int_0^1 f(x)\,dx$ finito

Esercizio Studiare la convergenza/divergenza dell'integrale improprio $\int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}\,dx$

dim

questo è certamente un integrale improprio in quanto l'intervallo è illimitato

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}} > 0 \quad \forall x \in]0,+\infty[$

$f(x)$ è continua $\quad \forall x \in]0,+\infty[$

$\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2} = |x|$

$\Rightarrow$ l'integrale $\int_0^{+\infty} f(x)\,dx$ converge o diverge positivam.

(non è indeterminato)

Devo studiare che succede in un intorno di $x=0$

" " " " $x=+\infty$

ovvero

debbo studiare la convergenza di

$\int_0^1 f(x)\,dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)\,dx$

(1) $\int_0^1 f(x)\,dx$

$f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}}$ ed è della forma $0/0$ per $x \to 0^+$

però $f(x) = \frac{\sqrt{1+x^2}-x}{\sqrt{x}} \sim \frac{1}{\sqrt{x}}$ per $x \to 0^+$

$$\left(\text{Infatti } \lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{1/\sqrt{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\cancel{\sqrt{x}}(\sqrt{1+x^2}+x)} \cdot \cancel{\sqrt{x}} = 1 \right)$$

Ma $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int_0^1 \frac{dx}{x^{1/2}} \in \mathbb{R}$ in quanto $\frac{1}{2} < 1$!

dunque per il criterio del confronto asintotico

$$\int_0^1 f(x)dx \in \mathbb{R}$$

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)dx$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{1+x^2}+x)} = \frac{1}{x^{3/2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^{3/2}}\,\frac{1}{2}$$

$$\left(\text{infatti } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{2x^{3/2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}+1} = 1 \right)$$

Ma $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{2x^{3/2}} = \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{3/2}} \in \mathbb{R}$ poiché $\frac{3}{2} > 1$

dunque, per il criterio del confronto asintotico

$$\int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$$

Riassumendo $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(x)dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_1^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$

Esercizio

Studiare $F(x) = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}\,dt$ al variare di $x \in \mathbb{R}$

Tracciandone un grafico approssimativo

dim

Dominio di F: $f(t) = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}$ f è definita e continua $\forall t \neq 0$

quando $t \to 0$ $f(t) \sim \frac{1}{\sqrt[3]{t}}$

Dunque, dato che $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \in \mathbb{R}$ in quanto $\frac{1}{3} < 1$

per il criterio di convergenza asintotica

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}\,dt \in \mathbb{R} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Ne segue che $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ è definita

per ogni $x \in \mathbb{R}$,

(integrando trovo una primitiva e questa è più regolare della f.ne di partenza!!)

LIMITI AGLI ESTREMI DEL DOMINIO

ovvero

$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} \int_0^x f(t)\,dt$$

Devo studiare $\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}\,dt$

$f(t) = \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}} > 0 \quad \forall t > 0$, quindi l'integrale converge o diverge (non è mai indeterminato)

$$e^{y} \geq 1+y \quad \forall y \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$
$$e^{+t^2} \geq 1+t^2 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$
$$\Downarrow$$
$$e^{+t^2} \geq 1+t^2 \quad \forall t > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{e^{t^2}} \leq \frac{1}{1+t^2} \quad \forall t > 0$$
$$\Downarrow$$
$$\frac{1}{\sqrt[3]{t}\, e^{t^2}} \leq \frac{1}{\sqrt[3]{t} \cdot (1+t^2)} \quad \forall t > 0$$

Ho $\int_0^{+\infty} f(t) = \int_0^1 f(t) + \int_1^{+\infty} f(t) = \int_0^1 f(t) + \int_1^{+\infty} \frac{dt}{e^{t^2} \cdot \sqrt[3]{t}} \leq$

$$\leq \underbrace{\int_0^1 f(t)\,dt}_{\Uparrow\ \mathbb{R}} + \underbrace{\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}\,(1+t^2)}}_{\Uparrow\ \mathbb{R}}$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{\sqrt[3]{t}\,(1+t^2)} \leq \int_1^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)} = \Big[\operatorname{arctg} t\Big]_1^{+\infty} = \frac{\pi}{2} - 1$$

Dunque $\int_0^{+\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ per il teorema del confronto

Dunque $\int_0^{-\infty} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$ in quanto $f(x)$ è pari

$F(x)$ è PARI

devo provare che $\int_0^{x} f(t)\,dt = \int_0^{-x} f(t)\,dt \quad \forall x > 0$

$$F(-x) = \int_0^{-x} f(t)\,dt = \int_0^{-x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}\,dt \underset{\substack{t=-y \\ dt=-dy}}{=} -\int_0^{x} \frac{e^{-(-y)^2}}{\sqrt[3]{-y}}\,dy$$

$$= -\int_0^{x} \frac{e^{-y^2}}{-\sqrt[3]{y}}\,dy = \int_0^{x} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt[3]{y}}\,dy = F(x)$$

MONOTONIA

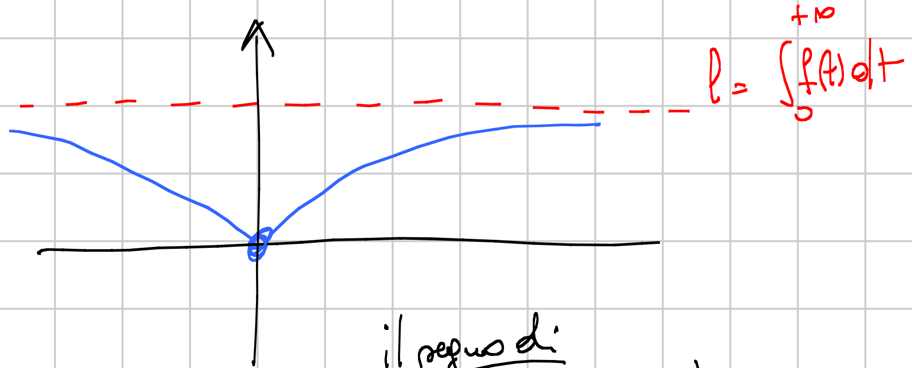
$$F(x) = \int_0^{x} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}\,dt$$

$$F'(x) = f(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt[3]{x}} \begin{cases} < 0 & x < 0 \\ > 0 & x > 0 \end{cases}$$

Teorema Fond. Calcolo Integrale

$$\Rightarrow F(x) \begin{cases} \text{decrescente} & x < 0 \\ \text{crescente} & x > 0 \end{cases}$$

$$F(0) = \int_0^{0} \frac{e^{-t^2}}{\sqrt[3]{t}}\,dt = 0$$



Se studiate il segno di $F''(x) = f'(x)$

scoprirete che $F''(x) < 0 \quad \forall x \neq 0$

Esercizio posto $a_n = \int_{5-\frac{16}{n^\alpha}}^{5} f(t)\,dt$

con $f(t) = \frac{1}{\sqrt{5-x}} + \sqrt{5-x}$

Studiare $\sum_n a_n$ al variare di α

(1) Trovare primitiva di f

(2) Calcolare $\int_{5-\frac{16}{n^\alpha}}^{5} f\,dt$

(3) Studiare $\sum_n a_n$