Esercizio Data $F(x)=\int_1^x e^{t^2}(\operatorname{sen}t+3)\,dt$, stabilire se esiste $(F^{-1})'(0)$ ed in caso affermativo calcolarla.
Scrivere poi l'equazione della retta Tg. al grafico
di F nel punto $(1,F(1))$
di F^{-1} " " $(0,F^{-1}(0))$

dim

$F(x)$ è derivabile $\forall x\in\mathbb{R}$ (perché è una primitiva!)
$F'(x)=e^{x^2}(\operatorname{sen}x+3)\geq e^{x^2}\cdot 2\geq 2$ $\forall x$ $\Rightarrow$ $F(x)$ è strett. crescente
Teorema fond. calcolo integrale
$\Rightarrow$ invertibile e F^{-1} risulta derivabile
e F^{-1} strett. crescente

$F(1)=0=\int_1^1 e^{t^2}(3+\operatorname{sen}t)\,dt$ $\quad F'(x)=e^{x^2}(\operatorname{sen}x+3)$ $\quad F'(1)=e(3+\operatorname{sen}1)$

l'equazione della retta Tg al grafico di F in $(1,F(1))$ è

$$y-F(1)=F'(1)\cdot(x-1)$$

sostituendo a $F(1)$ ed $F'(1)$ i loro valori trovo

$$\boxed{y=e\cdot(\operatorname{sen}1+3)\cdot(x-1)}$$

Eq. retta Tg al grafico di F in $\underbrace{(1,F(1))=(1,0)}$

Considero $F^{-1}(x)$: $F^{-1}(0)=y$ se $F(F^{-1}(0))=0=F(y)=\int_1^y e^{t^2}(\operatorname{sen}t+3)\,dt$ se $y=1$

$$(F^{-1})'(0)=(F^{-1})'(F(1))=\frac{1}{F'(1)}=\frac{1}{e(3+\operatorname{sen}1)}$$

quindi l'eq. della retta Tangente al grafico di F^{-1} in $(0,1)$

$$y-F^{-1}(0)=(F^{-1})'(0)\cdot(x-0)$$

$$\boxed{y-1=\frac{1}{e(\operatorname{sen}1+3)}\cdot x}$$

Eq. retta Tg al grafico di F^{-1} in $(0,1)$

Esercizio Data $F(x)=\left(\int_1^x e^{2t-t^2}\,dt\right)-1$ stabilire se esiste $(F^{-1})'(-1)$ ed in caso affermativo calcolarla. Scrivere poi l'equazione della retta tg. al grafico di F^{-1} nel punto $(-1, F^{-1}(-1))$

dim

E' necessario calcolare $x=F^{-1}(-1)$ $\underline{\text{se}}$ $F(x)=F(F^{-1}(-1))=-1$

$\underline{\text{se}}$ $\int_1^x e^{2t-t^2}dt-1=-1$

$\underline{\text{se}}$ $x=1$

$$\left.\begin{array}{l} x=1 \longrightarrow F(1)=-1 \\ x=-1 \longrightarrow F^{-1}(-1)=1 \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} (1,-1)\in \text{graf}.\,F \\ \text{se} \\ (-1,1)\in \text{graf}\,F^{-1} \end{array}$$

$$F(x)=\int_1^x e^{2t-t^2}dt-1 \qquad F'(x)=e^{2x-x^2}>0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

$\Rightarrow F$ strett. crescente $\Rightarrow \exists\, F^{-1}$ strett. crescente e derivabile

$$F'(1)=e^{2-1}=e \qquad (F^{-1})'(F(1))=\frac{1}{F'(1)}=\frac{1}{e}$$

dunque l'equazione della retta tg al grafico di F^{-1} nel pto $(-1,1)$ e'

$$y-F^{-1}(-1)=(F^{-1})'(-1)\cdot(x-(-1))$$

$$\boxed{y-1=\frac{1}{e}(x+1)}$$

Eq. retta tangente al grafico di F^{-1} in $(-1,1)$

Esercizio Calcolare il polinomio di Taylor di ordine 3 centrato nel punto $x_0=1$ relativo a

$$F(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

dim

1° modo: con la formula di Taylor $\quad P_3(x)=\sum_{k=0}^{3}\frac{f^{(k)}(1)}{k!}(x-1)^k$

$$F(1)=0$$

$$F'(x)=\frac{e^x}{x} \qquad F'(1)=e$$

$$f''(x)=-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x} \qquad f''(1)=e-e=0$$

$$f''(x)=\frac{2e^x}{x^3}-\frac{e^x}{x^2}-\frac{e^x}{x^2}+\frac{e^x}{x} \qquad f'''(1)=(2-1-1+1)e=e$$

$$P_3(x)=F(1)+F'(1)(x-1)+\frac{F''(1)}{2}(x-1)^2+\frac{F'''(1)}{6}(x-1)^3$$

$$=e(x-1)+\frac{e}{6}(x-1)^3$$

2 modo

$$F(x)=\int_1^x\frac{e^t}{t}\,dt=\int_1^x e\,\frac{e^{t-1}}{(t-1)+1}\,dt$$

$$\frac{e^{t-1}}{1+(t-1)}\underset{t-1=y}{=}\frac{e^y}{1+y}=\left(1+y+\frac{y^2}{2}+\frac{y^3}{3!}+o(y^3)\right)\left(1-y+y^2-y^3+o(y^3)\right)$$

$$=1\cancel{-y}\cancel{+y^2}\cancel{-y^3}\cancel{+y}\cancel{-y^2}\cancel{+y^3}+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{2}+\frac{y^3}{6}+o(y^3)$$

$$=1+\frac{y^2}{2}-\frac{y^3}{3}+o(y^3) \qquad y=t-1$$

$$=1+\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}+o((t-1)^3) \qquad t\to 1$$

$$F(x)=e\int_1^x\frac{e^{t-1}}{1+(t-1)}\,dt=e\int_1^x\left(1+\frac{(t-1)^2}{2}-\frac{(t-1)^3}{3}+o((t-1)^3)\right)dt \qquad \boxed{y=t-1}$$

$$=e\int_0^{x-1}\left(1+\frac{y^2}{2}+o(y^2)\right)dy=e\left[y+\frac{y^3}{6}+o(y^3)\right]_{y=0}^{y=x-1}$$

$$= e^{x}\left((x-1)+\frac{1}{6}(x-1)^3+o\left((x-1)^3\right)\right)$$

$$\Rightarrow P_3(x) = e(x-1)+\frac{e}{6}(x-1)^3 \qquad \blacksquare$$

OSS: $$\int_{x_0}^{x} o\left((t-x_0)^{\alpha}\right)dt = o\left((x-x_0)^{\alpha+1}\right)$$

infatti sia $F(x)=\int_{x_0}^{x} o\left((x-x_0)^{\alpha}\right)dx$: si ha che

$$\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)}{(x-x_0)^{\alpha+1}} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to x_0}\frac{F'(x)}{(\alpha+1)(x-x_0)^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha+1}\lim_{x\to x_0}\frac{o\left((x-x_0)^{\alpha}\right)}{(x-x_0)^{\alpha}}$$

$$= 0 \;!!$$

Esercizio Data la funzione $F(x)=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t^2+t+1}$

1) disegnare un grafico approssimativo di F
2) determinare il numero di soluzioni distinte dell'equazione $F(x)=k$

$f(t)=\frac{1}{t^2+t+1}$ e si osserva che $t^2+t+1=\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\geq\frac{3}{4}$

dim

dunque $f(t)$ è continua $\forall t\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(t)$ è integrabile su $[x,x+1]$ $\forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow F(x)=\int_x^{x+1}\frac{dt}{t^2+t+1}$ è definita $\forall x\in\mathbb{R}$

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{x+1}\frac{dt}{t^2+t+1}\underset{x\leq z\leq x+1}{=}\lim_{x\to+\infty}(x+1-x)\cdot\frac{1}{z_x^2+z_x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{z_x^2+z_x+1}$$

$$=\lim_{z\to+\infty}\frac{1}{z^2+z+1}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\int_x^{x+1}\frac{dt}{t^2+t+1}=\lim_{x\to-\infty}(x+1-x)\cdot\frac{1}{z_x^2+z_x+1}=\lim_{z\to-\infty}\frac{1}{z^2+z+1}=0^+$$

$x\leq z_x\leq x+1$

Segno di F(x)

$F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt$ con $\underbrace{f(t)>0}$ $\forall t\in\mathbb{R}$

Teorema confronto

$\Rightarrow F(x)=\int_x^{x+1}f(t)dt>\int_x^{x+1}0\,dt\Rightarrow F(x)>0\ \forall x$

Intervalli di monotonia

$$F(x) = \int_x^{x+1} \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_0^{x+1} \frac{dt}{t^2+t+1} - \int_0^{x} \frac{dt}{t^2+t+1}$$

$$F'(x) = \left(\int_0^{x+1} \frac{dt}{t^2+t+1}\right)' - \left(\int_0^{x} \frac{dt}{t^2+t+1}\right)' = \frac{1}{(x+1)^2+x+1+1}\cdot(x+1)' - \frac{1}{x^2+x+1}$$

$$F'(x) = \frac{1}{x^2+3x+3} - \frac{1}{x^2+x+1} = \frac{\cancel{x^2}+x+1-\cancel{x^2}-3x-3}{(x^2+x+1)(x^2+3x+3)} =$$

$$= \frac{-2x-2}{(x^2+x+1)(x^2+3x+3)} = 0 \quad \text{se} \quad x=-1$$

$\boxed{\text{OSS}}$ $x^2+3x+3>0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$F'(x) \begin{cases} >0 & x<-1 \\ =0 & x=-1 \\ <0 & x>-1 \end{cases} \Rightarrow x=-1 \text{ punto di max ASSOLUTO}$$

Corollario Teorema Weierstrass su interv. illimitati

$$F(-1) = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{t^2+t+1} = \int_{-1}^{0} \frac{dt}{\left(t+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}$$

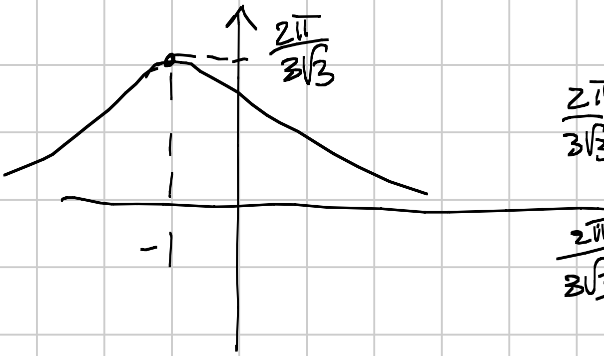
$$= \frac{4}{3}\int_{-1}^{0} \frac{dt}{1+\left[\left(t+\frac{1}{2}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\right]^2} =$$

$y = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(t+\frac{1}{2}\right)$

$dy = \frac{2}{\sqrt{3}}\,dt$

$$= \frac{4}{3}\left(\int_{-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}^{\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}} \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}dy}{1+y^2}\right) = \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\underset{\sqrt{3}}{\cancel{3}}}\cdot\frac{\cancel{\sqrt{3}}}{\cancel{2}}\cdot\left[\operatorname{arctg} y\right]_{y=-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{6}\right) = \pi\frac{2}{3\sqrt{3}}$$



$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} < k \Rightarrow f(x)=k$ $\emptyset$ sol

$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = k \Rightarrow f(x)=k$ 1 sol

$0 < k < \frac{2\pi}{3\sqrt{3}} \Rightarrow f(x)=k$ 2 sol

$k \leq 0 \Rightarrow f(x)=k$ $\emptyset$ sol

Esercizio Studiare, al variare di $\alpha>0$, la convergenza di

$$\int_0^{+\infty} \underbrace{\frac{\arctan x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}}}_{f(x)} \, dx$$

dim

$f(x)$ è rapporto tra f.ni continue su $\mathbb{R}^+ =]0,+\infty[$

Dunque devo studiare il comportamento di $f(x)$ quando

$x \to 0^+$ e quando $x \to +\infty$

ovvero debbo studiare la convergenza di

$$\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \int_{\pi}^{+\infty} f(x)\,dx$$
(1) (2)

(1) $\int_0^{\pi} f(x)\,dx$ $\qquad \arctan x = x + o(x^2)$

$$\frac{\arctan x}{(x^2+1)^\alpha \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{x}{1 \cdot x^{3\alpha}} = \frac{1}{x^{3\alpha-1}} \quad \text{per } x \to 0^+$$

(infatti si prova che $\lim_{x\to 0^+} \frac{f(x)}{\frac{1}{x^{3\alpha-1}}} = 1$)

avremo che $\int_0^{\pi} \frac{dx}{x^{3\alpha-1}} \in \mathbb{R}$ se $3\alpha - 1 < 1$ se $\boxed{\alpha < \frac{2}{3}}$

e dunque, per il criterio del confronto asintotico

$$\int_0^{\pi} f(x)dx \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{sse}} \quad \boxed{\alpha < 2/3}$$

(2) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty} f(x)dx$

$$f(x) = \frac{\operatorname{arctg} x}{(x^2+1)^{\alpha} \cdot x^{3\alpha}} \sim \frac{\pi/2}{x^{2\alpha} \cdot x^{3\alpha}} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{5\alpha}} \qquad x \to +\infty$$

$$\left(\text{infatti } \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{\frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x^{5\alpha}}} = 1 \right)$$

Ma $\displaystyle \frac{\pi}{2} \int_{\pi}^{+\infty} \frac{dx}{x^{5\alpha}} \in \mathbb{R}$ $\underline{\text{sse}}$ $5\alpha > 1$

$\underline{\text{sse}}$ $\alpha > 1/5$

Per il criterio del confronto asintotico per gli integrali impropri si ha che

$$\int_{\pi}^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R} \quad \underline{\text{sse}} \quad \boxed{\alpha > \frac{1}{5}}$$

Infine $\displaystyle \int_0^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$ $\underline{\text{sse}}$ $\begin{cases} \alpha < 2/3 \\ \alpha > 1/5 \end{cases}$

$\underline{\text{sse}}$ $1/5 < \alpha < 2/3$ ■

Esercizio Per quali valori di $\alpha>0$ converge

$$\int_2^{+\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{e^x-e^2}\,(x-2)^\alpha}}_{f(x)}\,dx$$

Sim

$f(x)$ è definita e continua su $]2,+\infty[$

dunque devo studiare

$$\int_2^3 f(x)dx + \int_3^{+\infty} f(x)dx$$

① ②

② $\int_3^{+\infty} f(x)dx$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x-e^2}\,(x-2)^\alpha} \sim \frac{1}{e^{x/2}\cdot x^\alpha} \quad x \to +\infty$$

$$\left(\text{infatti } \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{e^{x/2}\cdot x^\alpha}} = 1\right)$$

Ora $\frac{1}{e^{\frac{x}{2}}\cdot x^\alpha} \leq \frac{1}{e^{x/2}} \quad \forall x>3 \quad \forall\alpha>0$

e $\int_3^{+\infty} \frac{1}{e^{x/2}}dx = -2\int_3^{+\infty} -\frac{1}{2} e^{-x/2} dx = -2\left[e^{-x/2}\right]_2^{+\infty} = +2/e$

$\Rightarrow$ (Teorema confronto) $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{e^{x/2}\cdot x^\alpha} \in \mathbb{R} \quad \forall\alpha>0$

$\Rightarrow$ (Teorema Confronto Asintotico) $\int_3^{+\infty} f(x)dx \in \mathbb{R}$ $\boxed{\forall\alpha>0}$

$$\frac{e^y-1}{y}\xrightarrow[y\to 0]{}1$$

(1) $\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx$

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{e^x-e^2}\cdot(x-2)^\alpha}=\frac{1}{e\sqrt{e^{x-2}-1}\cdot(x-2)^\alpha}=$$

$$=\frac{1}{e}\cdot\frac{\sqrt{x-2}}{\sqrt{e^{x-2}-1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{x-2}\cdot(x-2)^\alpha}\sim\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$x\to 2^+$

$$\left(\text{infatti } \lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)}{\frac{1}{e}\cdot\frac{1}{(x-2)^{\alpha+\frac12}}}=1\right)$$

Ma $\displaystyle\int_2^3\frac{1}{e}\frac{1}{(x-2)^{\alpha+\frac12}}\,dx\in\mathbb{R}$ <u>sse</u> $\alpha+\frac12<1$

<u>sse</u> $\alpha<\frac12$

Quindi, per il Criterio del confronto Asintotico

$\displaystyle\int_2^3 f(x)\,dx\in\mathbb{R}$ <u>sse</u> $0<\alpha<\frac12$

Dunque $\displaystyle\int_2^{+\infty} f(x)\,dx\in\mathbb{R}$ <u>sse</u> $0<\alpha<\frac12$