Teorema (Cambio variabili integrali definiti)

$f: I \to \mathbb{R}$ continua $\forall x \in I$, I intervallo

$\varphi: J \to I$ " $\forall x \in J$, J "

$\varphi': J \to I$ " " "

$\varphi' \neq 0$ $\forall x \in J$

servono per avere φ invertibile e φ^{-1} derivabile

$$\Rightarrow \int_a^b f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(u)\,du \qquad \forall a, b \in J$$

dim facoltativa

Poniamo $Q(x) := \int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \quad x \in J$ $\qquad \boxed{Q'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)}$

$P(x) := \int_{\varphi(a)}^x f(u)\,du \quad x \in I$ $\qquad \boxed{P'(x) = f(x)}$

$R(x) := P(\varphi(x))$ $\qquad R'(x) = P'(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) = Q'(x)$

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(u)\,du = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} P'(u)\,du = \Big[P(u)\Big]_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} = P(\varphi(x)) - P(\varphi(a))$$

$$\int_a^x f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt = \int_a^x Q'(t)\,dt = \int_a^x R'(t)\,dt = \Big[R(t)\Big]_{t=a}^{t=x} = R(x) - R(a) = P(\varphi(x)) - P(\varphi(a))$$

$$\Rightarrow \int_{\varphi(a)}^{\varphi(x)} f(u)\,du = \int_a^x f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)\,dt \quad \forall x \in J,$$ cioè la Tesi ∎

Esercizio

Calcolare $\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} x)\cdot \cos x \, dx$

dim

si osserva che posto $f = \log x$ e $\varphi = \operatorname{sen} x$, sono soddisfatte le ipotesi del Teorema precedente e dunque

$$\int_{\pi/6}^{\pi/2} \log(\operatorname{sen} x)\cdot \cos x \, dx = \int_{\pi/6}^{\pi/2} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx \underset{\text{Teorema precedente}}{=} \int_{\varphi(\pi/6)}^{\varphi(\pi/2)} f(u)\,du$$

$$= \int_{\operatorname{sen}\pi/6=\frac{1}{2}}^{\operatorname{sen}\pi/2=1} \log(u)\,du = \Big[u\log u - u\Big]_{u=\frac{1}{2}}^{u=1} = -1-\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\log\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\left(1-\log 2\right) < 0$$

viene <0 poiché $\log(\operatorname{sen} x) < 0$ quando $x \in \left]\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\cos x > 0$ " "

$\boxed{\text{III}}$

Esercizio Provare che $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2}$

dim

1° modo $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \int_{\varphi(x)}^{\varphi(1)} \frac{1}{1+\left(\frac{1}{u}\right)^2} \cdot \left(-\frac{1}{u^2}\right) du =$

$u = 1/t$

$t = \varphi(u) = \frac{1}{u}$

$dt = -\frac{1}{u^2} du$

$= \int_{1/x}^{1} \frac{\cancel{u^2}}{1+u^2} \cdot \left(-\frac{1}{\cancel{u^2}}\right) du = -\int_{1/x}^{1} \frac{du}{1+u^2} = \int_1^{1/x} \frac{du}{1+u^2}$

2° modo $\int_x^1 \frac{dt}{1+t^2} = \left[\operatorname{arctg} t\right]_{t=x}^{t=1} = \frac{\pi}{4} - \operatorname{arctg} x$ — 1

$\int_1^{1/u} \frac{du}{1+u^2} = \left[\operatorname{arctg} u\right]_{u=1}^{u=1/x} = \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - \frac{\pi}{4}$ — 2

però non è vero che $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} \frac{1}{x} = \frac{\pi}{2}$ — 3

$1 + 2 + 3 \Rightarrow \nexists$

$\boxed{\text{VI}}$

INTEGRALI IMPROPRI

La Teoria relativa all'int. improprio è strett. legata a quella sviluppata per le serie numeriche

Si parla di integrali PROPRI (l'integrale definito che abbiamo sviluppato) quando

$f: I \to \mathbb{R}$ t.c. $\big(f(I)$ limitato$\big)$ e $\big(I$ chiuso e limitato$\big)$

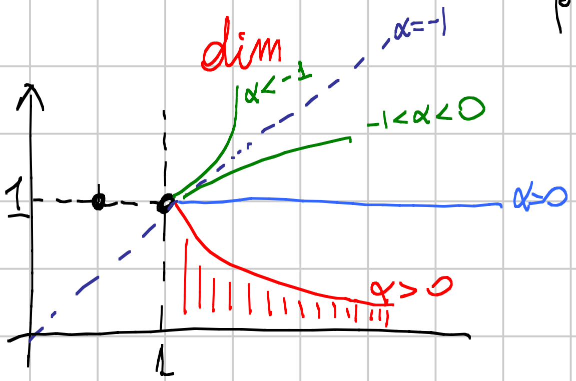
ovvero il grafico di f lo posso "inscatolare" in un rettangolo chiuso e limitato quando si parla di integrali impropri, si intende "integrali non propri", ovvero

$f: I \to \mathbb{R}$ I intervallo : ($f(I)$ illimitato o I illimitato)

Esempio (fondamentale 1)

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{1}{t^\alpha} dt$

dim



Il caso interessante è quando $\alpha \in]0,+\infty[$ poiché quando $\alpha \leq 0$ è chiaro che il limite è $= +\infty$

Quando $\alpha > 0$ abbiamo che $\{(x,y) : x \geq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\alpha}\}$

è un insieme non limitato in $\mathbb{R}^2$

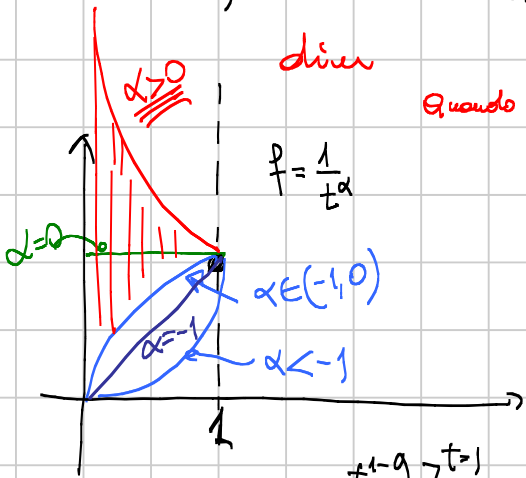
$$\int_1^\beta \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=1}^{t=\beta} & \alpha \neq 1 \\ \left[\log t\right]_{t=1}^{t=\beta} & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ \log \beta & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\beta \to +\infty} \int_1^\beta \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \lim_{\beta \to +\infty} \left(\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = +\infty & \alpha < 1 \\ \lim_{\beta \to +\infty} \log \beta = +\infty & \alpha = 1 \\ \lim_{\beta \to +\infty} \left(\frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{\alpha - 1} & \alpha > 1 \end{cases}$$

Esempio (Fondamentale II)

Studiare, al variare di $\alpha \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{\beta \to 0^+} \int_\beta^1 \frac{dt}{t^\alpha}$

dim



Quando $\alpha < 0$, $f = t^{-\alpha}$ è continua e l'integrale è proprio

Il caso interessante è $\alpha > 0$

Si nota che

$\left\{(x,y) : 0 < x \leq 1 \quad 0 \leq y \leq \frac{1}{x^\alpha}\right\}$

è illimitato $\forall \alpha > 0$

$$\int_\beta^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \left[\frac{t^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right]_{t=\beta}^{t=1} & \alpha \neq 1 \\ \left[\log t\right]_{t=\beta}^{t=1} & \alpha = 1 \end{cases} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \alpha \neq 1 \\ -\log \beta & \alpha = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{\beta \to 0^+} \int_\beta^1 \frac{dt}{t^\alpha} = \begin{cases} \lim_{\beta \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = \frac{1}{1-\alpha} & \alpha < 1 \\ \lim_{\beta \to 0^+} -\log\beta = +\infty & \alpha = 1 \\ \lim_{\beta \to 0^+} \left(\frac{1}{1-\alpha} - \frac{\beta^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = +\infty & \alpha > 1 \end{cases}$$

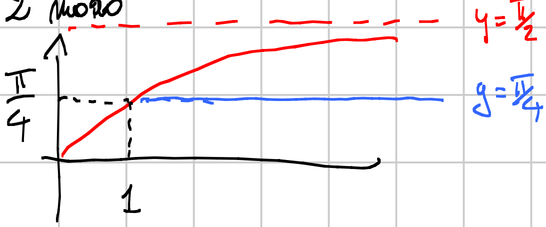
Esempio

Studiare $\displaystyle\int_0^{+\infty} \arctg t \, dt = \lim_{\beta \to +\infty} \int_0^\beta \arctg t \, dt$

dim

1° modo: calcolare la primitiva G di $\arctg t$ e passare al limite in $\displaystyle\lim_{\beta \to +\infty} \left[G(x)\right]_{x=0}^{x=\beta}$

2° modo



$\arctg t \nearrow$ (strett. crescente)

$\Rightarrow \forall t > 1 \quad \arctg t > \arctg 1 = \frac{\pi}{4}$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_0^\beta \arctg t\,dt}_{} = \int_0^{1} \arctg t\,dt + \int_1^\beta \arctg t\,dt \qquad (\forall \beta > 1)$$

Teorema Confronto Integrali PROPRI

$$\geq \int_0^1 \arctg t\,dt + \int_1^\beta \frac{\pi}{4}\,dt$$

$$= \underbrace{\int_0^1 \arctg t\,dt + \frac{\pi}{4}(\beta-1)}$$

Confronto tra limiti

$$\Rightarrow \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^\beta \arctg t\,dt \geq \underbrace{\int_0^1 \arctg t\,dt}_{\in\mathbb{R}} + \lim_{\beta\to+\infty} \frac{\pi}{4}(\beta-1) = +\infty$$

$$\Rightarrow \int_0^{+\infty} \arctg t\,dt = +\infty$$

Esercizio (è l'equivalente delle Cond. Necessarie per $\sum_n a_n$)

$f: [0,+\infty[\to \mathbb{R}$, f continua $\forall x > 0$

se $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell$ & $\left(\lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt\right) \in \mathbb{R}$

allora $\ell = 0$

dim

Per assurdo suppongo che la tesi sia falsa, ovvero $\ell \neq 0$

Per fissare le idee considero il caso $\ell > 0$

Ovvero $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \ell > 0 \iff \forall \varepsilon > 0\ \exists M > 0 : \forall x > M \Rightarrow \ell-\varepsilon < f(x) < \ell+\varepsilon$

$$\Rightarrow \varepsilon = \frac{\ell}{2}\quad \exists M > 0 : \forall x > M \Rightarrow \underset{0<}{\frac{\ell}{2}} = \ell - \frac{\ell}{2} < f(x)$$

$$\Rightarrow \forall x > M \quad f(x) > \frac{\ell}{2}$$

$$\Rightarrow \int_0^x f(t)\,dt = \int_0^M f(t)\,dt + \int_M^x f(t)\,dt \qquad \forall x > M$$

$$+\ f(x) > \frac{\ell}{2} \quad \forall x > M$$

Teorema confronto integrali $\Longrightarrow$
$$\int_0^x f(t)\,dt > \int_0^{\pi} f(t)\,dt + \int_{\pi}^{x} \frac{\ell}{2}\,dt \quad \forall x > \pi$$
$$= \int_0^{\pi} f(t)\,dt + \frac{\ell}{2}(x-\pi) \quad \forall x > \pi$$

Teorema confronto limiti $\Longrightarrow$
$$\lim_{x \to +\infty} \int_0^x f(t)\,dt > \int_0^{\pi} f(t)\,dt + \lim_{x\to+\infty} \frac{\ell}{2}(x-\pi) = +\infty$$

$$\Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_0^x f(t)\,dt = +\infty \quad \text{ASSURDO}$$

Def (Integrale impropio)

$f : [a,b[\longrightarrow \mathbb{R}$ t.c. $\exists \int_a^{\beta} f(t)\,dt \ \forall \beta \in [a,b[$ diciamo

"f integrabile in senso generalizzato (o impropio) in $[a,b[$" se $\exists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^{\beta} f(t)\,dt \in \mathbb{R}$

"l'integrale impropio di f su $[a,b[$ diverge a $+\infty$ $(-\infty)$"

se $\exists \lim_{\beta\to b^-} \int_a^{\beta} f(t)\,dt = +\infty \ (-\infty)$

"f non è integrabile impropiamente su $[a,b[$"

se $\nexists \lim_{\beta \to b^-} \int_a^{\beta} f(t)\,dt$

Esempio (f.ne NON integrabile impropriamente)

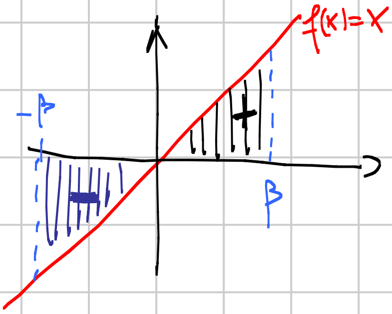
$f(x) = \operatorname{sen} x$ su $[0,+\infty[$ non è integrabile impropriamente

poiché
$$\nexists \lim_{\beta\to+\infty} \int_0^{\beta} \operatorname{sen} x\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} \Big[-\cos x\Big]_{x=0}^{x=\beta} = \lim_{\beta\to+\infty} (-1+\cos\beta)$$

che non esiste!

Esempio Non esiste $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$

dim



Viene voglia di dire

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx \overset{?}{=} \lim_{\beta\to+\infty}\int_{-\beta}^{\beta} x\,dx = \lim_{\beta\to+\infty} 0 = 0$$

vero

NON È VERO!

Infatti $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\,dx = -\infty + \infty$

che è una forma indeterminata!!!

infatti $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{-n^2}^{0} x\,dx$

$\displaystyle\int_{0}^{+\infty} x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{0}^{n} x\,dx$

$$\Longrightarrow \int_{-\infty}^{0} x\,dx + \int_{0}^{+\infty} x\,dx = \lim_{n\to+\infty}\left(\left[\frac{x^2}{2}\right]_{-n^2}^{0} + \left[\frac{x^2}{2}\right]_{0}^{n}\right)$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left(-\frac{n^4}{2} + \frac{n^2}{2}\right) = -\infty$$

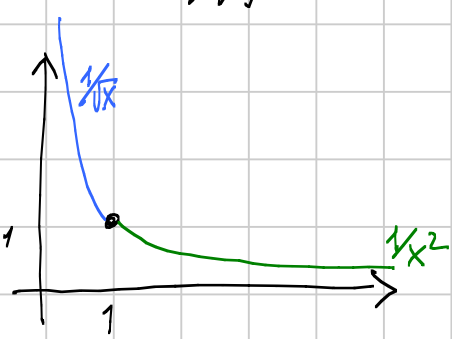
Pb 1 Data $f : [0,+\infty[\to \mathbb{R}$ t.c. $\sup f([0,+\infty[) = +\infty$

e $f > 0$ $\forall x \in [0,+\infty[$

$$\overset{?}{\Longrightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx = +\infty \quad ???$$

NO: Si consideri

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x} & 0 < x \le 1 \\ \dfrac{1}{x^2} & 1 < x \end{cases}$$



e si ha $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx < +\infty$ & $\displaystyle\int_1^{+\infty} f = \int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,dx < +\infty$

Pb 2 $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$ limitata; $\lim_{x\to+\infty} f(x)=0$

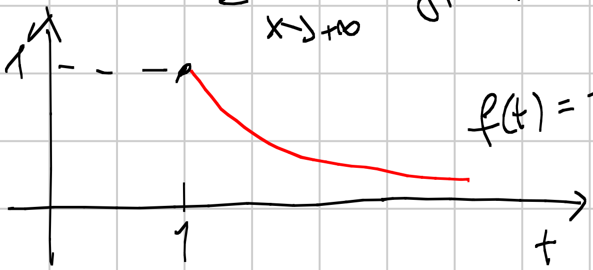
$$\overset{?}{\Rightarrow} \int_0^{+\infty} f(x)\,dx \in \mathbb{R} \qquad ???$$

NO: infatti $f(x)=\frac{2t}{1+t^2}$ soddisfa le ipotesi in quanto

$$|f(x)|\leq 2 \quad \forall x\geq 0 \quad , \quad \lim_{x\to+\infty} f(x)=0$$

però
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,dx=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x \frac{2t}{1+t^2}\,dt=\lim_{x\to+\infty}\left[\log(1+t^2)\right]_{t=0}^{t=x}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\log(1+x^2)=+\infty$$



$f:[a,b[\to\mathbb{R}$ monotona deb. crescente $\Rightarrow \exists \lim_{x\to b^-} f(x)=\ell \begin{cases} +\infty \\ \in\mathbb{R}\end{cases}$

Serie a termini positivi $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} S_n \begin{cases} \in\mathbb{R} \\ +\infty\end{cases}$

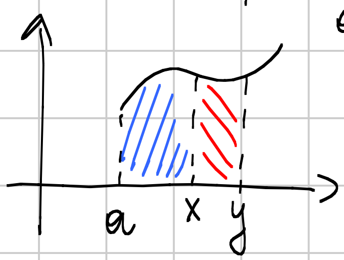
Teorema ($f\geq 0 \Rightarrow \exists$ integrale improprio)

$f:[a,b[\to\mathbb{R}$ t.c. $\exists \int_a^\beta f(t)\,dt \quad \forall \beta\in[a,b[$

Se $f(x)\geq 0$ (≤ 0) $\forall x\in[a,b[$ allora $\exists \int_a^b f(x)\,dx \begin{cases} +\infty \ (-\infty) \\ \in\mathbb{R}\end{cases}$

dim

Considero $F(\beta)=\int_a^\beta f(t)\,dt$



$$\int_a^x f(t)\,dt+\int_x^y f(t)\,dt=\int_a^y f(t)\,dt=F(y)$$

$$F(x) + \int_x^y f(t)\,dt$$

Se $x<y$, essendo $f(t)\geq 0$ allora $\int_x^y f(t)\,dt \geq 0 = \int_x^y 0\,dt$

qui? cosa? ...

$$\Rightarrow F(y) = \int_a^y f(t)\,dt = F(x) + \int_x^y f(t)\,dt \geq F(x)$$

$\Rightarrow F$ è deb. crescente su $[a,b[$

$$\Rightarrow \exists \lim_{\beta\to b^-} F(\beta) = \lim_{\beta\to b^-} \int_a^\beta f(t)\,dt \begin{cases} +\infty \\ \in \mathbb{R} \end{cases} \qquad \blacksquare$$