

Teorema (f monotona $\Rightarrow f$ integrabile)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ limitata su $[a, b]$ chiuso e limitato

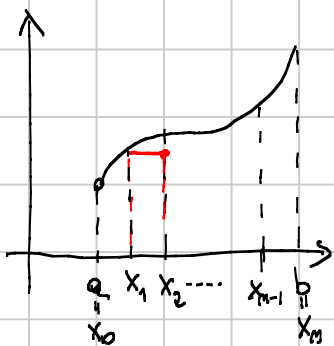
Se f debbamente crescente (decrescente) allora f integrabile

dim

$\exists \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_\varepsilon$ suddivisione di $[a, b]$: $S(f, \mathcal{C}_\varepsilon) - s(f, \mathcal{C}_\varepsilon) < \varepsilon$

Devo costruire $\mathcal{C}_\varepsilon$!!

f debbamente crescente



$$x_0 = a; \underbrace{\frac{b-a}{n} + a}_{x_1}; \underbrace{2 \cdot \frac{b-a}{n} + a}_{x_2}; \underbrace{3 \cdot \frac{b-a}{n} + a}_{x_3}; \dots; \underbrace{n \cdot \frac{b-a}{n} + a}_{x_n = b}$$

$$\mathcal{C}_n = \left\{ a + k \frac{b-a}{n} ; k = 0, 1, 2, \dots, n \right\}$$

$$s(f, \mathcal{C}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \inf_{f|_{[x_k, x_{k+1}]}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_k)$$

$$S(f, \mathcal{C}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} (x_{k+1} - x_k) \cdot \sup_{f|_{[x_k, x_{k+1}]}} = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} \cdot f(x_{k+1})$$

$$\Rightarrow S(f, \mathcal{C}_n) - s(f, \mathcal{C}_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \underbrace{\frac{b-a}{n}}_{\text{non dipende da } k} \cdot (f(x_{k+1}) - f(x_k))$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} (f(x_{k+1}) - f(x_k)) =$$

$$= \frac{b-a}{n} \left\{ \cancel{f(x_1)} - \cancel{f(x_0)} + \cancel{f(x_2)} - \cancel{f(x_1)} + \cancel{f(x_3)} - \cancel{f(x_2)} + \dots + (f(x_n) - \cancel{f(x_{n-1})}) \right\}$$

$$= \frac{b-a}{n} \cdot (f(x_n) - f(x_0)) = \frac{1}{n} \cdot (b-a) \cdot (f(b) - f(a))$$

$$\forall \varepsilon > 0 \exists n = n(\varepsilon) : \frac{1}{n} \cdot (b-a) \cdot (f(b) - f(a)) < \varepsilon$$

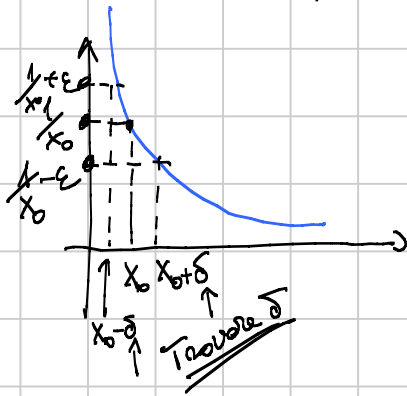
$$\Rightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \mathcal{C}_{n(\varepsilon)} \text{ suddivisione di } [a, b] : S(f, \mathcal{C}_{n(\varepsilon)}) - s(f, \mathcal{C}_{n(\varepsilon)}) < \varepsilon \quad \square$$

Parentesi: funzioni uniformemente continue

Studiamo la continuità di $f(x) = \frac{1}{x}$ per $x > 0$

Fixato $x_0 > 0$, voglio provare che

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0 : \forall x > 0 \quad \underbrace{x_0 - \delta < x < x_0 + \delta}_{(*)} \Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$



Se $x_0 > 0$, allora posso prendere $\delta > 0$ t.c.
 $x_0 - \delta > 0$ (è suff. prendere $0 < \delta < x_0$)

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| = \left| \frac{x_0 - x}{x_0 x} \right| \stackrel{(*)}{<} \frac{\delta}{x_0} \cdot \frac{1}{x_0 - \delta}$$

Se ora $\frac{\delta}{x_0(x_0 - \delta)} = \varepsilon$ siamo a posto!!

$$\Rightarrow \delta = \varepsilon x_0^2 - \varepsilon \delta x_0 \Rightarrow \delta(1 + \varepsilon x_0) = x_0^2 \cdot \varepsilon$$

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0) = \frac{x_0^2 \cdot \varepsilon}{1 + \varepsilon x_0}$$

ma allora $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$

ho meno questa limit. poichè voglio $\delta < x_0$!

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0, (\delta < x_0) \quad \delta = \min \left\{ \frac{x_0^2 \cdot \varepsilon}{1 + \varepsilon x_0}, \frac{x_0}{1 + x_0} \right\} \quad \text{t.c.}$$

$$\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\Rightarrow \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x_0} \right| < \varepsilon$$

Oss: fissato $\varepsilon = 1$, se $x_0 \rightarrow 0$ allora $\delta \rightarrow 0$

|| se $x_0 \rightarrow +\infty$ allora $\delta \rightarrow +\infty$

Def (uniforme continuità)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$, questa ci dice "uniformemente continua su A"

$$\text{se } \forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Oss: Nella def. di uniforme continuità $\delta = \delta(\varepsilon)$: non dipende da x_0 !!

Def: Uniforme continuità è un concetto globale 3

Teorema (Lipschitziana $\Rightarrow$ unif. continua)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitziana su $A \Rightarrow f$ è uniformemente continua su A

dim

da ipotesi $\exists L > 0 : \forall x, y \in A \quad |f(x) - f(y)| \leq L |x - y|$

ma allora

$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \frac{\varepsilon}{L} > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| < L \cdot \frac{\varepsilon}{L} = \varepsilon$

Teorema (u.c. $\Rightarrow$ continua)

$f: A \rightarrow \mathbb{R}$ unif. continua su $A \Rightarrow f$ continua $\forall x \in A$

dim

hip. $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x, y \in A \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$

ponendo $\boxed{y = x_0 \in A}$

$\Downarrow$
 $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 \quad \forall x \in A \quad |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$

cioè la Ter

Lipschitziana $\Rightarrow$ Unif. continua $\Rightarrow$ continua



Proviamo (Controesempio) che continua $\not\Rightarrow$ unif. continua ①

Prese $f(x) = x^2$, questa è continua $\forall x \geq 0$

Proviamo che $f = x^2$ NON È unif. continua su $[0, +\infty[$

Voglio provare che non $(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x, y \geq 0 \quad |x - y| < \delta \Rightarrow |x^2 - y^2| < \varepsilon)$

voglio provare

$\Rightarrow \exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \exists x, y \geq 0 : |x - y| < \delta \text{ e } |x^2 - y^2| \geq \varepsilon$

ovvero che $(x_\delta + 1)^2 - x_\delta^2 = \cancel{x_\delta^2} + 2x_\delta + 1 - \cancel{x_\delta^2} =$
 $= 2x_\delta + 1 \geq 1$

he debbo fare in modo che $|x_\delta - y_\delta| < \delta$, ovvero
 debbo prendere $y_\delta = x_\delta + \frac{\delta}{2}$.

Si ha dunque $\frac{\delta^2}{4} \geq 0$ prendendo $x_\delta \geq \frac{1}{\delta}$

$$(x_\delta + \frac{\delta}{2})^2 - x_\delta^2 = \cancel{x_\delta^2} + \frac{\delta^2}{4} + \delta x_\delta - \cancel{x_\delta^2} \geq \delta x_\delta \geq 1$$

Fisso $\varepsilon = 1 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta \geq \frac{1}{\delta}, y_\delta = x_\delta + \frac{\delta}{2} : |x_\delta - y_\delta| < \delta$ e
 $|x_\delta^2 - y_\delta^2| \geq 1$

Controesempio (unif. continua $\not\Rightarrow$ Lipschitziana)

$f(x) = \sqrt{x}$ questa è unif. continua su $[0,1]$ ma
 non è Lipschitziana su $[0,1]$

dim

$f = \sqrt{x}$ è unif. continua su $[0,1]$ per Heine Cantor

$f(x) = \sqrt{x}$ abbiamo già provato che NON è Lipschitziana III

Teorema (Heine Cantor)

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua $\forall x \in [a,b]$ chiuso e limitato

allora f è uniformemente continua su $[a,b]$

dim

Per assurdo: supponiamo che f non sia u.c. su $[a,b]$
 ovvero

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall \delta > 0 \quad \exists x_\delta, y_\delta \in [a,b] : |x_\delta - y_\delta| < \delta \text{ e } |f(x_\delta) - f(y_\delta)| \geq \varepsilon$$

$\Downarrow \delta = \frac{1}{n}$

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \forall n > 0 \quad \exists x_n, y_n \in [a,b] : |x_n - y_n| < \frac{1}{n} \text{ e } |f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$$

ora $\{y_m\}_m \subseteq [a,b]$, dunque è limitata $\Rightarrow$ (Bolzano Weierstrass)

5

$\Rightarrow \exists \{y_{k_m}\}_m$ sottosuccessione convergente, ovvero
 $y_{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} y^* \in [a,b]$

$$\text{ma } |x_m - y_m| < \frac{1}{m} \Rightarrow y_m - \frac{1}{m} < x_m < y_m + \frac{1}{m}$$

$$\begin{array}{ccc} \Rightarrow y_{k_m} - \frac{1}{k_m} < x_{k_m} < y_{k_m} + \frac{1}{k_m} & & \boxed{k_m \geq m} \\ \downarrow m \rightarrow +\infty & & \downarrow m \rightarrow +\infty \\ y^* - 0^+ & & y^* + 0^+ \end{array} \quad \begin{array}{c} \frac{1}{k_m} \leq \frac{1}{m} \\ \Downarrow \\ \frac{1}{k_m} \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0 \end{array}$$

$\Rightarrow$ (Teorema dei Corollari) $x_{k_m} \rightarrow y^*$

$$\text{ma allora } \lim_{m \rightarrow +\infty} f(x_{k_m}) = f(y^*) = \lim_{m \rightarrow +\infty} f(y_{k_m})$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$
 $f \text{ continua}$

$$\text{ma allora } \lim_{m \rightarrow +\infty} |f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})| = 0$$

Assendo, in questo $|f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})| \geq \varepsilon !!$

Esempio $f(x) = \sqrt{x}$ è unif. continua su $[0,1]$

dim

f è continua $\forall x \in [0,1]$, $[0,1]$ è chiuso e limitato

$\Rightarrow$ (Heine Cantor) $f = \sqrt{x}$ è uniformemente continua su $[a,b]$

Esempio $f(x) = x^e$ è uniformemente continua su $[0,10^5]$

dim

f è continua $\forall x \in [0,10^5]$, $[0,10^5]$ è chiuso e limitato

$\Rightarrow$ (Heine Cantor) f è unif. continua su $[0,10^5]$ $\square$

Chiusa Poreieri (uniforme continue)

6

Sostituzione $t = \tan \frac{x}{2}$

$$\sin x = \frac{\sin(2 \cdot \frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad |||$$

$$\cos x = \frac{\cos(2 \cdot \frac{x}{2})}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \quad |||$$

$$t = \tan \frac{x}{2} \quad \frac{dt}{dx} = \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2}$$

$$x = 2 \arctan t \quad \frac{dx}{dt} = \frac{2}{1+t^2}$$

Esempio

Calcolare $\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx$

$$\int \frac{\sin x}{1 + \cos x} dx \stackrel{\text{dim}}{=} \left(\int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} \right)_{t=\tan \frac{x}{2}}$$

$$dx = \frac{2dt}{1+t^2}$$

$$= \left(\int \frac{2t}{1+t^2} \cdot \frac{2}{1+t^2} \cdot \frac{1}{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}} dt \right)_{t=\tan \frac{x}{2}}$$

$$= \left(\int \frac{2t}{1+t^2} dt \right)_{t=\tan \frac{x}{2}} \stackrel{\text{funzionale}}{=} \left(\log(1+t^2) + C \right)_{t=\tan \frac{x}{2}} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= \log \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Verifica: $\left(\log \left(1 + \tan^2 \left(\frac{x}{2} \right) \right) + C \right)' = \frac{1}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}} \cdot 2 \cdot \tan \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) = \tan \frac{x}{2}$

e infatti $\frac{\sec x}{1 + \cos x} = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} =$

$$= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad \square$$

Esempio Calcolare $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(x+1)}$

dim

valgo per porre $\sqrt{x}$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(x+1)} \cdot dx$$

$$\stackrel{\substack{t = \sqrt{x} \\ t^2 = x}}{=} \left(\int \frac{2t dt}{t^2(t^2+1)} \right)_{t=\sqrt{x}} = \left(2 \int \frac{1}{1+t^2} dt \right)_{t=\sqrt{x}}$$

$$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \boxed{dx = 2t dt}$$

$$= \left(2 \arctan t + C \right)_{t=\sqrt{x}} \quad C \in \mathbb{R}$$

$$= 2 \arctan(\sqrt{x}) + C \quad C \in \mathbb{R}$$

Esercizio Determinare, al variare di $k \in \mathbb{R}$, il numero di soluzioni reali distinte di

$$x^6 - 18x^3 + 16 \log x^3 = k$$

dim

È una equazione non lineare $f(x) = k$
 ovvero $\begin{cases} y = f(x) \\ y = k \end{cases}$

Domínio di $f \equiv]0, +\infty[$ ($\log x^3$ è def. solo per $x > 0$!)

limiti agli estremi $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^6 \left(1 - \frac{18}{x^3} + \frac{16}{x^6} \log x^3 \right) = +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^6 - 18x^3 + 16 \log x^3) = -\infty$$

Studio di $f' = 6x^5 - 54x^2 + 48 \cdot \frac{1}{x}$

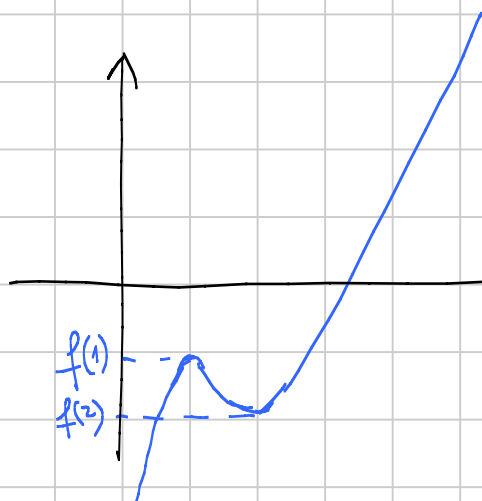
$$f'(x) = 0 \quad \text{ma} \quad 6x^6 - 54x^3 + 48 = 6(x^6 - 9x^3 + 8) = \\ = 6(x^3 - 8)(x^3 - 1) = 0$$

$$\text{ma} \quad x^3 = 8 \quad \vee \quad x^3 = 1 \quad \text{ma} \quad x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = 2$$

$$f'(x) = \begin{cases} > 0 & 0 < x < 1 \\ < 0 & 1 < x < 2 \\ > 0 & 2 < x \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(1) = \max \text{ rel. interno} = 1^6 - 18 \cdot 1^3 + 16 \cdot \log 1^3 = -17$$

$$f(2) = \min \text{ rel. interno} = 2^6 - 18 \cdot 2^3 + 48 \log 2 = \\ = 64 - 144 + 48 \log 2 = -80 + 48 \log 2$$



$$k < f(2) \Rightarrow 1 \text{ sol}$$

$$k = f(2) \Rightarrow 2 \text{ sol}$$

$$f(1) < k < f(2) \Rightarrow 3 \text{ sol}$$

$$k = f(1) \Rightarrow 2 \text{ sol}$$

$$f(1) < k \Rightarrow 1 \text{ sol}$$